Universidad de Costa Rica — **MA–1023**
Facultad de Ciencias — **Cálculo con optimización**
Escuela de Matemática — **Semana 6**
Fecha de entrega: — **Jueves 14 de Septiembre**
Jueves 21 de Septiembre: G-001 y G-003 — **II Ciclo de 2017**
Viernes 22 de Septiembre: G-002 — **Puntaje: 100 puntos**

TAREA 05

Instrucciones: La tarea es estrictamente individual. Muestre los razonamientos necesarios que justifiquen sus respuestas. La tarea debe entregarse escrita a **mano**.

---

1. (5 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función escalar diferenciable en tres variables definida como $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Encuentre la derivada direccional de f en el punto $P_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\pi}{4}\right)$ con la dirección del vector unitario $\overrightarrow{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$.

2. (10 puntos) Sea $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ función escalar diferenciable en dos variables ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$), sean

$$\overrightarrow{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),\ \overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } \quad \overrightarrow{w} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

vectores unitarios, y suponga que $D_{\overrightarrow{u}} f(3,2) = 1$ y que $D_{\overrightarrow{v}} f(3,2) = \sqrt{8}$. Calcule $D_{\overrightarrow{w}} f(3,2)$.

3. (10 puntos) Considere

$$\begin{cases} z = F(u,v) \\ u = x^3 y^2 \\ v = x^2 y^3 \end{cases}$$

donde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es 2-veces diferenciable. Calcule las derivadas parciales de orden 2 de z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ y } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

en términos de las derivadas parciales de F: $F_u,\ F_v,\ F_{uu},\ F_{uv},\ F_{vv}$.

4. (10 puntos) Considere

$$\begin{cases} z = F(x,y) \\ x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

donde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es 2-veces diferenciable. Muestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

5. (10 puntos) Considere

$$\begin{cases} w = F(x,y) \\ x = e^r\cos(\theta) \\ y = e^r\sin(\theta) \end{cases}$$

donde $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es 2-veces diferenciable. Muestre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{1}{e^{2r}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right).$$

6. (30 puntos) En cada caso, transforme la ecuación diferencial en otra ecuación, en términos de las derivadas parciales de z con respecto a las variables u, v:

(a) (10 puntos)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

donde $u = x-ct,\ v = x+ct,\ c\neq 0$ constante.

(b) (10 puntos)

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

donde $x = u,\ y = uv$.

(c) (10 puntos)

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

donde $u = xy,\ v=\dfrac{y}{x}$.

Sugerencia: Considere

$$\begin{cases} z = F(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

donde $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es 2-veces diferenciable, calcule las derivadas parciales de orden 2 de z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ \text{y}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

en términos de las derivadas parciales de F: $F_u,\ F_v,\ F_{uu},\ F_{uv},\ F_{vv}$, y sustituya en la ecuación original en cada caso.

7. (5 puntos) Calcule la primera derivada de la función $y = \arcsin(x)$ utilizando derivación implícita.

8. (10 puntos) Suponga que $z = g(x, y)$ se define implícitamente en la relación $F(x-y, x-z) = 0$. Muestre que z satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

9. (10 puntos) Suponga que $z = g(x, y)$ se define implícitamente en la relación

$$F(x + y + z, ax + by) = 0$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ constantes. Muestre que z satisface la ecuación diferencial

$$b\frac{\partial z}{\partial x} - a\frac{\partial z}{\partial y} = a - b.$$