Escuela de Matemáticas

Universidad de Costa Rica

MA-1004: Álgebra Lineal

Prácticas

Sistemas de ecuaciones lineales, Matrices
Determinantes

M.Sc. Marco Gutiérrez Montenegro

2017

1. Sistemas de ecuaciones lineales

1. *Considere el sistema de ecuaciones en las variables x, y y z :*

$$\begin{cases} 2ax - 3y - z = -4a + 6b \\ 3x - y + az = -a - b \qquad \text{con } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   a) *Determine el conjunto solución si $a = \frac{9}{2}$ y $b = 0$.*

   $R/\ S = \left\{ \left(\frac{1}{3}t - \frac{57}{29}, t, \frac{9}{29} : t \in \mathbb{R} \right) \right\}.$

   b) *Encuentre los valores de a y b para que $(-2, 2a - b, -3)$ sea solución del sistema.*

   $R/\ a = -\frac{1}{2}$ y $b = 2$.

2. *Considere el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3p & -1 \\ -3 & p & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

   a) *Determine para que valores de p y de b la matriz $\begin{pmatrix} b \\ 8 \\ b+7 \end{pmatrix}$ es solución del sistema.*

   $R/\ p = 1; b = -5.$

   b) *En el sistema de ecuaciones dado, sustituya p por el valor que encontró en la parte a) y determine el conjunto solución del sistema.*

   $R/\ S = \{(-1 - 2t, 6 + t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$

3. *Dado el sistema de ecuaciones lineales*

   Determine para que valor o valores de p el sistema:

$$\begin{cases} px_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ px_1 + px_2 + (p+1)x_3 = p \\ px_1 + px_2 + (2p-2)x_3 = 2p - 2 \end{cases}$$

   a) *tiene infinitas soluciones* $R/\ p = 2.$

   b) *tiene solución única* $R/\ p \neq 0,\ p \neq 2$ y $p \neq 3.$

   c) *no tiene solución* $R/\ p = 0$ y $p = 3.$

4. *Para cualquier sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas siempre se tiene que $Rng(A) \leq Rng(A\,|\,b)$. Las soluciones de tal sistema se relacionan con el rango de su matriz correspondiente según:*

   a) *Si $Rng(A) < Rng(A\,|\,b)$ entonces el sistema* **no posee soluciones**.

   b) *Si $Rng(A) = Rng(A\,|\,b) = n$ entonces el sistema* **posee única solución**.

   c) *Si $Rng(A) = Rng(A\,|\,b) < n$ entonces el sistema* **posee infinitas soluciones caracterizadas por $n - Rng(A)$ variables libres.**

Considere un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada está dada por

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Determine el conjunto solución de dicho sistema con el análisis del rango de la matriz y de la matriz aumentada.

R/ $S = \{(-t_2, t_1, -t_3, t_2, t_3) : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$.

5. *Considere la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \end{pmatrix}$.

   a) *Pruebe que* A *es equivalente por filas a la matriz* $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

   b) *Determine los valores de* a, b *y* c *para los cuales el sistema de ecuaciones*

   $$\begin{cases} ax + by = c \\ ax - by = c \end{cases}$$

      (i) *tiene solución única*

      R/ $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$

      $S = \left\{ \left(\dfrac{c}{a}, 0 \right) \right\}$.

      (ii) *tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro*

      R/ $b = 0$ *y* $a \neq 0$

      $S = \left\{ \left(\dfrac{c}{a}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

      $a = 0$, $b \neq 0$ *y* $c = 0$

      $S = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

      (iii) *tiene infinitas soluciones que dependen de dos parámetros*

      R/ $a = b = c = 0$

      $S = \{(s, t) : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$.

      (iv) *es inconsistente*

      R/ $a = 0$ *y* $c \neq 0$.

6. *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = -3 \\ kx_1 + kx_2 + 2kx_3 + (k^2 + 4k)x_4 = 1 \end{cases}$$

   a) *Determine para qué valor o valores de* k *el sistema tiene infinitas soluciones con un parámetro.*

   R/ $k \neq -1$.

   b) *Resuelva el sistema para este caso (es decir, cuando tiene infinitas soluciones con un parámetro).*

   R/ $S = \left\{ \left(-\dfrac{2}{k}, -\dfrac{k+1}{k} - 2t, t, \dfrac{1}{k} : t \in \mathbb{R} \right) \right\}$.

7. *Para la siguiente matriz aumentada que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & c \\ 0 & 0 & c & 0 \end{array}\right).$$

   a) *Determine cuáles son los valores de a, b y c de tal forma que el rango de la matriz aumentada del sistema sea 1.* *R/* $a = 2$, $b = -1$ *y* $c = 0$.

   b) *Determine cuáles son los valores de a, b y c de tal forma que el rango de la matriz aumentada del sistema sea 3.* *R/* $a \neq 2$, $b \neq -1$ *y* $c = 0$.

8. *Para la siguiente matriz aumentada que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array}\right).$$

   a) *Encuentre una ecuación que contenta a los valores reales g, h, k de tal manera que la matriz aumentada anterior corresponda a un sistema consistente.*

   R/ $h + k + 2g = 0$.

   b) *Determine el conjunto solución del sistema consistente correspondiente a la matriz aumentada anterior.*

   R/ $S = \left\{ \left(\frac{3g + 4h}{3} - \frac{1}{3}t, \frac{h}{3} + \frac{5}{3}t, t : t \in \mathbb{R} \right) \right\}$.

9. *Dado el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 2x + ky + z + w = 0 \\ 3x + (k-1)y - 2z - w = 0 \\ x - 2y + 4z + 2w = 0 \\ 2x + y + z + 2w = 0 \end{cases}$$

   Determine los valores reales de k para los cuales el sistema de ecuaciones anterior tiene soluciones distintas de la trivial. *R/* $k = -1$.

10. *Determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ x + 3y + 5z + 7w = 11 \\ x - z - 2w = -6 \end{cases}$$

   $S = \emptyset$.

11. *Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales $m \times n$ y C una matriz invertible $n \times n$. Pruebe que el sistema $(CA)x = Cb$ es equivalente al sistema $Ax = b$.*

12. *Pruebe que si u y v son soluciones del sistema de ecuaciones lineales no homogéneo $AX = b$, entonces la diferencia $w = v - u$ es solución del sistema homogéneo $AX = 0$.*

13. *Estudie el siguiente sistema de ecuaciones según los parámetros dados.*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x - y + (b-2)z = a - 2 \\ -2x - ay - 2z = -a^2 + 3a - 4 \end{cases}$$

R/ $S = \left\{ \left(2 - a - \dfrac{1}{b}, a - 1, \dfrac{1}{b} \right) \right\}$, *si* $a \neq 2$ *y* $b \neq 0$.

$S = \{(-1 + (b-1)t, 2 - bt, t) : t \in \mathbb{R}\}$, *si* $a = 2$ *y* $b \in \mathbb{R}$.

$S = \emptyset$, *si* $a \neq 2$ *y* $b = 0$.

14. *Considere el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z = a \end{cases}$$

Utilice el método de Gauss-Jordan para determinar

a) *El valor de a para el cual el sistema no tiene solución.* *R/* $a = -2$.

b) *Resuelva el sistema para el valor de a en el que hay infinitas soluciones y encuentre estas soluciones.*

R/ $a = 2$; $S = \{(1 + 3t, 1 - 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

15. *Considere el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

Utilizando el método de Gauss Jordan encuentre los valores de a para los cuales el sistema posee solución única, y encuentre dicha solución.

R/ $a \neq -4, a \neq 4$

$$S = \left\{ \left(\frac{8}{7} - \frac{1}{a+4}, \frac{10}{7} + \frac{2}{a+4}, \frac{1}{a+4} \right) \right\}.$$

16. *Suponga que $u_1, u_2, ..., u_n$ son soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$, pruebe que $k_1u_1 + k_2u_2 + ... + k_nu_n$ también es solución del sistema homogéneo.*

17. *Considere el sistema* 2×2*:*

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ -bx + ay = 1 \end{cases}$$

Muestre que tiene un número finito de soluciones para todos los valores de a y b.

18. *Encuentre tres soluciones particulares del sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x + 4y - 3z + 2t = 5 \\ \qquad\qquad z - 4t = 2 \end{cases}$$

R/ Una solución particular es $(7, 1, 2, 0)$.

19. *Considere el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Verifique lo siguiente:

a) si $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$, *esto es, si* $ad - bc \neq 0$, *entonces el sistema tiene la solución única dada por*

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - be}{ad - bc}.$$

a) *si* $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \neq \dfrac{e}{f}$, *entonces el sistema no tiene solución.*

b) *si* $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{e}{f}$, *entonces el sistema tiene infinitas soluciones.*

20. *Determine el conjunto solución para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.*

$$a)\ \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - 2y - 4z = -3 \\ 5x - y - z = 4 \end{cases} \quad R/\ S = \{(1, -1, 2)\}.$$

$$b)\ \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5 \\ 2x + 4y - z = 2 \end{cases} \quad R/\ S = \left\{\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{8}t, -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}t, t : t \in \mathbb{R}\right)\right\}.$$

$$c)\ \begin{cases} x - y - z = 11 \\ x + y + z = 7 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases} \quad R/\ S = \{(9, -7, 5)\}.$$

$$d)\ \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 10 \end{cases} \quad R/\ \textit{Inconsistente.}$$

$$e)\ \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + 2y + 2z = -4 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \quad R/\ S = \{(10 + 4t, -7 - 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

$$f)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -3 \\ 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad R/\ S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)\right\}.$$

$$g)\ \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 4y - 6z = 2 \\ 3x + 6y - 9z = 3 \end{cases} \quad R/\ S = \{(1 - 2t_1 + 3t_2, t_1, t_2 : t \in \mathbb{R})\}.$$

21. *Considere el sistema* 3×3 :

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{x_j}{i+j-1} = i \quad (1 \leq i \leq 3).$$

Verifique que dicho sistema de ecuaciones tiene solución única.

22. *Demuestre que si p, q son soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$, entonces $\alpha p + \beta q$ es una solución de $AX = 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

23. *Verifique que el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

es inconsistente.

24. *Dado el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 2s + 4t = 1 \\ 2x + 5y - 8z - s + 6t = 4 \\ x + 4y - 7z + 5s + 2t = 8 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones dependiendo de dos variables libres.

R/ $S = \{(21 - r_1 + 24r_2, -7 + 2r_1 + 8r_2, r_1, 3, r_2) : r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$.

25. *Muestre que a, b, c, α, β y γ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} cx + az = b \\ cy + bz = a \\ bx + ay = c \end{cases}$$

donde $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$ y $z = \cos\gamma$.

2. Matrices

1. *Con $E(x)$ se designa el mayor entero que no es mayor que x. Construya la matriz A con $\langle A \rangle_{ij} = E(j/i)$ y de orden 2×4.*

R/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. *Determine si la matriz P de orden 3 con $\langle P \rangle_{ij} = E(ij)$ es simétrica.*

R/ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ *es simétrica.*

3. *Considere la matriz* $M = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *¿Cuál es el valor de $m_{22} + m_{21} \cdot m_{23}$?*

R/ 6.

4. *Sea* N *una matriz diagonal de orden 4 tal que para todo* $i = 1, 2, 3, 4$ *se cumple* $n_{ii} = (-1)^{2i}$. *Determine los elementos de la diagonal principal.*

R/ $n_{11} = 1, n_{22} = 1, n_{33} = 1, n_{44} = 1$.

5. *Sean* P, Q *y* R *matrices de orden* $m \times p$, $n \times m$ *y* $n \times p$ *respectivamente. Determine el orden de la matriz* $A = \left(3P - 5Q^T R\right)^T$.

R/ $p \times m$.

6. *Sean* $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. *Suponga que la matriz* M *depende de* N *y* P*; esto es, existen dos valores* α *y* β *tales que* $M = \alpha N + \beta P$. *Determine los valores de* α *y* β.

R/ $\alpha = 5$*;* $\beta = 1$.

7. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, *hallar la matriz* D *de manera que* $A + B - D = O$.

R/ $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

8. *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine las siguientes matrices:

   a) $2A + -3C$ *R/* $\begin{pmatrix} -1 & -13 & 26 \\ -10 & 13 & 6 \\ -3 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

   b) $AB - CB$ *R/* $\begin{pmatrix} 36 & -12 \\ 9 & 7 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

   c) $B^T \left(A^T - I_3\right)$

   R/ $\begin{pmatrix} 17 & -1 & 15 \\ 3 & -1 & 18 \end{pmatrix}$.

   d) $C^T - 3I$

   R/ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 5 & -6 & 5 \\ -6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

9. *Sean* A *una matriz de orden* $m \times n$, B *de orden* $p \times n$ *y* C *de orden* $n \times m$. *Demuestre entrada por entrada, que* $k(AB^T) + (BC)^T = \left(k \cdot A^T + C\right)^T \cdot B^T$ *con* $k \in \mathbb{R}$.

10. *Sean* A, B *y* C *tres matrices tales que el producto* ABC *es una matriz de orden* 3×2 *y el producto* $A \cdot C^T$ *es una matriz cuadrada. Determine el orden de* A, B *y* C.

R/ $A_{3\times 2}(\mathbb{R})$*;* $B_{2\times 3}(\mathbb{R})$ *y* $C_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

11. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ *tal que* $A^2 = O$*. Pruebe, entrada por entrada, que*

$$(I + A)^{-1} = I - A.$$

12. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determine las condiciones que debe cumplir a, b, c *para que se verifique* $AB = BA$.

R/ $a = b = c$.

13. Suponiendo que las inversas indicadas existen, demostrar las siguientes igualdades.

a) $\left(C^{-1} + D^{-1}\right)^{-1} = C(C + D)^{-1}D$.

b) $(I + CD)^{-1}\, C = C(I + DC)^{-1}$.

c) $\left(C + DD^T\right)^{-1} D = C^{-1}D(I + D^T C^{-1}D)^{-1}$.

14. Sea A *una matriz antisimétrica. Demuestre que* A^2 *y* A^4 *son matrices simétricas.*

15. Sea B *una matriz antisimétrica. Pruebe que* A^3 *y* A^5 *son matrices antisimétricas.*

16. Sean A *y* B *las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

¿Existe una valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que la igualdad* $(A - \lambda I_3)^2 = B$ *sea verdadera?*

R/ $\lambda = 2$.

17. Se dice que una matriz A *es* **nilpotente** *de orden* n*, si verifica que* $A^n = \mathcal{O}$*. Hallar el orden de nilpotencia de la matriz* $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

R/ $n = 3$.

18. Una matriz es **normal** *si conmuta con su transpuesta, es decir* $AA^T = A^T A$.

a) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *es normal.*

b) Hallar una expresión para todas las matrices normales de orden 2.

R/ $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

19. Compruebe que toda matriz A *cuadrada de orden 2, verifica la ecuación:*

$$A^2 - (a + d) \cdot A + (ad - cb) \cdot I_2 = 0.$$

20. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *determine todas las matrices* $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *tales que* $A^T AB = B$.

    R/ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

21. *Pruebe que si* $AB = A$ *y* $BA = B$, *la matriz* A *es idempotente.*

    Sug: Multiplique por A *a la derecha de* $AB = A$.

22. *Sean* A, B *y* C *tres matrices para las cuales las operaciones indicadas a continuación se pueden realizar. Utilizando las propiedades de las operaciones, pruebe que*

$$2\left(C + 3B^T\right)^T \cdot A = 2C^T A + 6BA.$$

23. *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \cos y & \operatorname{sen} y \\ -\operatorname{sen} y & \cos y \end{pmatrix},$$

    pruebe que $AB = BA$.

24. *Hallar dos matrices* A *y* B *que verifiquen:*

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$-A + 4B = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

    R/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

25. *Demuestre que:*

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

26. *Una matriz* A *cuadrada de orden* n *es ortogonal si* $A \cdot A^T = I_n$, *pruebe que el producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal.*

27. *Sea* A *una matriz cuadrada de orden* n *y* B *una matriz de orden* $n \times 1$, *probar que la matriz* $S = 2A^3 + 3BB^T$ *es simétrica.*

28. *Demuestre que el producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal.*

29. *Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B^T = \begin{pmatrix} y & x & 1 \end{pmatrix}$. *Si* $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, *determine* x *y* y.

    R/ $x = \frac{18}{19}$; $y = \frac{6}{19}$.

30. Calcule (si existe) la matriz inversa para cada una de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ *R/* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ *R/* $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ *R/* $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ -3 & -9 & 1 & -3 \\ -6 & -18 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ *R/* $D^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

31. Sea $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ *una matriz cuadrada de orden 2 arbitraria.*

a) Obtener una expresión general para la inversa de A.

R/ $A^{-1} = \dfrac{1}{xw - yz} \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix}.$

b) Determinar la condición necesaria y suficiente para que A *sea invertible.*

R/ $xw - yz \neq 0.$

32. Calcule la matriz $X = A^{-1}\left[I - C^T\right] \cdot B^{-1}$ *para las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

R/ $X = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$

33. Se dan las matrices cuadradas, del mismo orden, A, B *y* X *con* $A - B$ *invertible, tales que* $XA^T = I + (BX^T)^T$.

a) Use las operaciones con matrices y sus propiedades para despejar X *en términos de las matrices* I, A *y* B *(no use sistemas de ecuaciones).*

R/ $X = \left[(A - B)^{-1}\right]^T.$

b) Según lo que obtuvo en la parte a) determine X *si*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

R/ $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$.

34. *Sea $k \in \mathbb{R}$ y considere las matrices reales A y C definidas como:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & k \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Si se sabe que $AB^T + A = (2C)^T + 2B^T$ determine la matriz B que satisface dicha ecuación(usando álgebra matricial y sin resolver sistema de ecuaciones alguno).

R/ $B = \begin{pmatrix} 4k-3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2k^2+2k-2 & 2k-2 & 2k-3 \end{pmatrix}$.

35. *Se dan las matrices cuadradas, del mismo orden, A, B, C Y X con A y B invertibles, tales que $(AXB)^T + C = I$ (donde I es la matriz identidad).*

   a) Use las operaciones con matrices y sus propiedades para despejar X en términos de las matrices I, A, B y C (no use sistemas de ecuaciones).

   R/ $X = A^{-1}\left[I - C^T\right] \cdot B^{-1}$.

   b) Según lo que obtuvo en a), determine X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

R/ $X = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

36. *Sean* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Determine la siguiente matriz $(AB - I_2)^{-1}$.

   R/ $(AB - I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

   b) Utilice solamente álgebra de matrices para encontrar una matriz X tal que $\left(A^T X\right)^T B - I_2 = X^T$.

   R/ $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

37. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *determine el rango de A.*

R/ $Rng(A) = 2$.

38. *Sea A una matriz de orden m y B una matriz de orden $m \times n$.*

   a) *¿De qué orden deben ser las matrices X y D, de modo que la igualdad,*

   $$XA^T - B^T = XD^T$$

   tenga sentido? *R/ $X \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$; $D \in M_m(\mathbb{R})$.*

   b) *Para que la igualdad dada en a) tenga sentido y $(A-D)^T$ sea invertible, utilice las operaciones con matrices y sus propiedades para despejar X en términos de A, B y D.*

   R/ $X = B^T \cdot \left[(A-D)^T\right]^{-1}$.

   c) *Determine explícitamente la matriz X si*

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   R/ $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

39. *Considere la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$. Determine la matriz C^{-1} en términos del parámetro k.*

   R/ $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{k} & -2 & -\frac{1}{k} \end{pmatrix}$.

   Demuestre que que la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   es inversa de sí misma.

40. *Probar que $A\left(A^TA\right)^{-1} + B\left(B^TB\right)^{-1}B^T = I$, para dos matrices A y B cuadradas de orden n.*

41. *Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.*

   a) *Calcular una matriz B escalonada y una matriz C escrita como producto de matrices elementales 3×3, tales que $B = CA$.*

   R/ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) *Lo mismo que en a), pero B es escalonada reducida.*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = E(F_3 + F_1)E(-2F_3 + F_2)E(-2F_2 + F_1)E(F_2, F_3)E(F_1, F_2).$$

42. *Dada la matriz* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Demostrar por inducción que* $P^n = \begin{pmatrix} 1 & n & S_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *donde:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n.$$

43. *Dada la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) *Determinar el rango de la matriz A.*

R/ $Rng(A) = 2$.

b) *Sin hacer cálculos adicionales, diga si la matriz A es invertible. Justifique su respuesta.*

R/ La matriz no es invertible pues $Rng(A) < 3$.

44. *Sea* M *una matriz cuadrada tal que* $M^2 = M$ *y* N *es otra matriz cuadrada tal que* $N = 2M - I$. *Demostrar que* $N^2 = I$, *donde* I *representa la matriz identidad.*

45. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Demuestre que* $A + A^T$ *siempre es simétrica, pero no* $A - A^T$.

46. *Considere las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Halle una matriz X *tal que* $XAB^T = AB^T + XC^2$.

R/ $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

47. *Sea* $A \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ *tal que* $A^T A = 1$ *y* $B \in M_n(\mathbb{R})$ *tal que* $B = I_n - 2AA^T$.

a) *Demuestre que A es una matriz simétrica.*

b) *Demuestre que* $B^2 = I_n$.

c) *Proponga un ejemplo de una matriz* $C \in M_{1\times 3}(\mathbb{R})$ *distinta de la identidad tal que* $C^{-1} = C$.

48. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 - A - I = 0$.

a) Muestre, entrada por entrada, que $(A - I)^{-1} = A$.

b) Para la siguiente matriz B calcule $B^2 - B$ y utilice el resultado en a) para deducir el valor de B^{-1} si $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

R/ $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

49. Considere un número real a distinto de 0 y de 1, y además considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule $A^T(B + C)$.

R/ $A^T(B + C) = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Encuentre $(aA + B)^{-1}$.

R/ $(aA + B)^{-1} = \dfrac{1}{a(a-1)} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -a & a \end{pmatrix}$.

c) Hallar el valor de la matriz X que satisface $(XB)^T = C - (aXA)^T$.

R/ $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}$.

50. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz B, de orden 2, no nula, tal que $AB = O$, con O la matriz nula.

R/ $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ *con* $a, b, \in \mathbb{R}$.

51. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^T A \in M_n(\mathbb{R})$ es no singular. Si $B = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$ demuestre que $B^2 - B = O_m$.

52. Sean A y B matrices cuadradas $n \times n$, con A invertible. Pruebe que

$$(A + B)A^{-1} \cdot (A + B) = (A - B)A^{-1}(A + B).$$

53. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tales que A y $AB - BA$ son conmutativas con el producto. Pruebe por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n B - BA^n = nA^{n-1}(AB - BA).$$

54. Probar que no existe una matriz A, de dimensión 2×2, A simétrica, tal que

$$\left(A^{-1}\right)^T \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A - I_2\right] = I_2.$$

55. *Halle una matriz B tal que*

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$R/\ B = \begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & 0\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

56. *Dada la matriz* $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *demostrar que para* $n \in \mathbb{N}$

$$P + P^2 + \cdots + P^n = \begin{pmatrix} n & 0\\ \dfrac{n(n+1)}{2} & n\end{pmatrix}.$$

57. *Sean* $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ *tales que:*

$$A = B + C, \qquad C^2 = O \quad \text{y} \quad BC = CB.$$

Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, *se cumple que*

$$A^{n+1} = B^n\left[B + (n+1)C\right].$$

58. *Sean* $A, B, Q \in M_n(\mathbb{R})$ *tales que* $A = Q^{-1}BQ$, *demostrar que* $A^n = Q^{-1}B^nQ$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

59. *Sea A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times m$. Una matriz B se llama inversa derecha de A si $AB = I_m$. Si AA^T es invertible, demostrar que $A^T\left(AA^T\right)^{-1}$ es una inversa derecha de A.*

60. *Demuestre que la matriz* $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ *verifica la relación* $A^n = 3^{n-1}A$.

61. *Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo tamaño. Si A es invertible, con A y B conmutativas, demuestre que A^{-1} y B también conmutan.*

62. *Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es* **involutiva** *si verifica que $A^2 = I_n$. Demostrar que A es involutiva si y solo si $(I_n - A)(I_n + A) = 0$.*

63. *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que la matriz $C = AA^T$ es simétrica.*

64. *Demuestre que si A y B son matrices idempotentes y además, $AB = BA$, entonces la matriz AB es idempotente.*

65. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz ortogonal ($A^T = A^{-1}$). Demuestre que A^{-1} es ortogonal.*

66. *Demuestre que si una matriz A satisface la ecuación $A^2 - 3A + I = O$ e invertible, entonces, $A^{-1} = 3I - A$.*

67. *Si se sabe que A y B son matrices que conmutan, además A es idempotente y B una matriz involutiva, demuestre que $(A+B)^3+(A-B)^3=8A$.*

68. *Demuestre que si Q es una matriz involutiva, entonces $P=\dfrac{1}{2}(Q+I)$ es una matriz idempotente.*

69. *Demuestre que si una matriz A tiene dos de las siguientes tres propiedades:*

    a) Simétrica

    b) Ortogonal

    c) Involutiva.

    entonces cumple con la tercera.

70. *Probar que si la matriz A es idempotente, también lo es la matriz $B=I-A$. Además, pruebe que $AB=BA=O$.*

71. *Una matriz $A\in M_n(\mathbb{R})$ es antisimétrica si $A^T=-A$. Demuestre que para cualquier matriz $B\in M_n(\mathbb{R})$ se tiene que $B-B^T$ es antisimétrica.*

72. *Demuestre que para toda $A\in M(n,\mathbb{R})$, la matriz $B=\dfrac{A+A^T}{2}$ es simétrica y la matriz $C=\dfrac{A-A^T}{2}$ es antisimétrica.*

73. *Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la igualdad $A+B=AB$. Demuestre que $(I-B)^{-1}=-B^{-1}A$ donde I denota la matriz identidad.*

74. *Suponga que $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $C\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Demuestre entrada por entrada que*
$$A^TB-(CA)^T=A^T(B-C^T).$$

75. *Si $A\in M(n,\mathbb{R})$, tal que $A^2=A$, demostrar que para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple que*
$$(A+I)^n=I+(2^n-1)A.$$

76. *Sea $A\in M(n,\mathbb{R})$ con A una matriz invertible, pruebe que:*

    a) Si A es simétrica e involutiva, entonces $C=\frac{1}{2}\left(I_n-A^T\right)$ es idempotente.

    b) Si $I-A$ es invertible, entonces $A\,(I-A)^{-1}=\left(A^{-1}-I\right)^{-1}$.

77. *Pruebe que $A=\begin{pmatrix}4&0&1\\2&3&6\\6&-3&-4\end{pmatrix}$ no tiene inversa. Además, calcule una matriz E escalonada y exprésela como $E=(F_k\cdots F_1)\,A$ donde $F_1,\cdots,F_k$ son matrices elementales.*

78. *Suponga que una matriz A cuadrada es invertible. ¿Qué se puede decir del conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $Ax=0$?*

    R/ Solución trivial.

79. *Demuestre que la matriz* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *es igual a su propia inversa si* $A = \pm I$ *o si* $a_{11} = -a_{22}$ *y* $a_{21}a_{12} = 1 - a_{11}^2$.

80. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Si* A *es una matriz invertible, entonces el sistema de ecuaciones* $Ax = b$ *tiene solución única dada por* $x = A^{-1}b$. *Utilice este resultado para hallar el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

R/ $A^{-1}b = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

81. *Sean* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *y suponga que* B *y* $I - AB$ *son invertibles. Demuestre que*

$$B(I - AB)^{-1}B^{-1} - B(I - AB)^{-1}A = I.$$

82. *Sea* C *una matriz columna de tamaño* $(n \times 1)$ *cuyas entradas son todas igual a 1, y considere las matrices* A *de tamaño* $(n \times 1)$ *tal que* $A^T \cdot A = C$ *y* $B = I_n - 2A \cdot A^T$.

    a) *Pruebe que la matriz* B *es simétrica.*

    b) *Demuestre que* $B^T = B^{-1}$.

83. *Las matrices* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *son tales que* A *y* $(AB - BA)$ *son permutables. Pruebe usando inducción matemática que:*

$$A^nB - BA^n = nA^{n-1}(AB - BA), \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Sug: Despejar de forma conveniente en la hipótesis de inducción.

84. *Considere las matrices* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. *Demuestre que:*

$$(I + AB)^{-1} = I - A\,(I + BA)^{-1} \cdot B.$$

85. *Sean* a, b, c *tres números reales tales que verifican* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. *Considere la matriz* $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. *Demuestre que* A *es una matriz idempotente.*

86. *Demuestre que si* A *y* B *son dos matrices permutables (es decir, conmutan en el producto) y* C *es una matriz ortogonal, entonces las matrices* $(CAC)^T$ *y* $(CBC)^T$ *conmutan.*

87. *Sean* A *y* B *matrices simétricas de orden* n. *Demuestre que para que* AB *sea una matriz simétrica es condición necesaria y suficiente que las matrices* A *y* B *sean conmutativas.*

88. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *tal que* A *es idempotente.*

    a) *Pruebe que* $B = I - A$ *es idempotente.*

b) *Demuestre que* $AB = BA = O$.

89. *Se llama traza de una matriz cuadrada* A *y se denota* $Tr(A)$, *a la suma de los elementos de la diagonal principal:*

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *demuestre que:*

a) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$.

b) $Tr(AB) = Tr(BA)$.

c) *Es imposible la igualdad matricial* $AB - BA = I$.

90. *Halle* A^{-1} *si se sabe que la matriz* A *satisface la identidad*

$$A^2 - Tr(A) \cdot A + 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

R/ $A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

91. *Si se tiene que* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -7 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, *calcular el valor de* z *que cumpla:*

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

R/ $z = 12$.

92. *Sean* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *tales que* A *es invertible y además,* $AB = O$. *Pruebe que* $B = O$.

93. *Sean* $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *y* C *una matriz simétrica de orden* n. *Además, considere la matriz* A *definida por:*

$$A = C - \frac{2}{B^T B} B B^T.$$

Demuestre, entrada por entrada, que A *es una matriz simétrica.*

94. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *tal que* $A^2 = 2A - I$, *calcular* A^5.

R/ $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

95. *Suponga que* A *es una matriz ortogonal y* $B = AP$, *siendo* P *una matriz regular. Pruebe que la matriz* PB^{-1} *es ortogonal.*

96. *Pruebe que si* A *es una matriz antisimétrica e* $I + A$ *es regular, entonces la matriz* $C = (I - A)(I + A)^{-1}$ *es ortogonal.*

97. *Suponga que A es una matriz ortogonal y además la matriz $I+A$ es regular. Demuestre que la matriz $B=(I-A)(I+A)^{-1}$ es antisimétrica.*

98. *Sea* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. *Pruebe que A es ortogonal si y solo si, se verifican las condiciones siguientes:*

    (i) La suma de los productos correspondientes de dos filas distintas es 0.

    ii) La suma de los cuadrados de los elementos de cualquier fila es 1.

99. *Sea C una matriz columna de tamaño $n \times 1$ cuyas entradas son todas igual a 1, y considere las matrices A de tamaño $n \times 1$ tal que $A^T \cdot A = C$ y $B = I_n - 2A \cdot A^T$.*

    a) Pruebe que la matriz B es simétrica.

    b) Demuestre que $B^T = B^{-1}$.

100. $B \in M_n(\mathbb{R})$ *que cumple* $B^T \cdot B = B^2$. *Demuestre que:*

$$Tr\left((B-B^T)^T \cdot (B-B^T)\right) = 0.$$

3. Determinantes

1. *Demuestre sin calcular los determinantes:*

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. *Resolver la ecuación* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 4 & 6 \\ 4 & x & 12 \end{vmatrix} = 0.$ *R/* $x_1 = 1, x_2 = -1.$

3. *Expresar, en forma de producto, el siguiente determinante*

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}.$$

R/ $(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c).$

4. *Demostrar, sin utilizar la Expansión de Laplace, que*

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

5. *Calcular el valor de un determinante de la matriz A de orden n, cuyos elementos son $\langle A\rangle_{ij} = i-j$ para todo i, j.* *R/* $|A| = 0.$

6. *Demostrar que* $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} = 0.$

7. *En cada caso obtenga una matriz C triangular tal que A es equivalente a C por filas y $|A| = |C|$ y calcule $|A|$.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

R/ 3 *y* 20.

8. *Sean A y B matrices cuadradas, conociendo que:*

$$\left|\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\right| = |A||B|,$$

calcule el determinante de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

R/ 15 *y* 36.

9. *Hallar el valor del determinante* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

R/ 1.

10. *Use solo propiedades del determinante para verificar que:*

    a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & b+a \end{vmatrix} = 0.$

    b) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$

11. *Demostrar que* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+1a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$

12. *Calcule* $\begin{vmatrix} 2a+2b & 2b+2c & 2c+2a \\ 2b+2c & 2c+2a & 2a+2b \\ 2c+2a & 2a+2b & 2b+2c \end{vmatrix}$ *si* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3.$

R/ $48.$

13. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Demuestre que:*

    (i) A *es invertible* $\Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$.
    (ii) $A^2 = A \Rightarrow |A| = 1$ *o* $|A| = 0$.
    (iii) $A^T A = I_n \Rightarrow |A| = 1$ *o* $|A| = -1$.
    (iv) $Rng(A) = n \Rightarrow |A| \neq 0$.

14. *Si* $B = P^{-1}AP$, *con* A, B, P *matrices en* $M_n(\mathbb{R})$ *y* P *invertible, entonces*

    (a) *Muestre que* $\det(B) = \det(A)$.
    (b) *Muestre que* $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$, *con* $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (c) *Si* A *es invertible y si* $A^{-1} = A^T$, *demuestre que* $\det(2A) = \pm 2^n$.

15. *Calcular las raíces de la ecuación definida por el determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

R/ $0, 1, 2, 3, ..., n-1.$

16. *Calcular las soluciones de la ecuación* $\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix} = 0.$

R/ $x = 0, 1, 2, 3.$

17. *Hallar el valor del determinante de orden* n

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

Sug: Sumar a la primera columna todas las restantes, luego transformar a una matriz triangular.

R/ $(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$

18. *Compruebe que los siguientes determinantes no dependen de a.*

(i) $\begin{vmatrix} 1 & a+3 & (a+2)(a+3) \\ 1 & a+4 & (a+3)(a+4) \\ 1 & a+5 & (a+4)(a+5) \end{vmatrix}$. *R/* 2.

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & a+2 & (a+2)^2 \\ 1 & a+3 & (a+3)^3 \\ 1 & a+4 & (a+4)^2 \end{vmatrix}$. *R/* 2.

19. *Sin desarrollar, pruebe que el siguiente determinante es múltiplo de 6.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 12 & 7 \end{vmatrix}.$$

20. *Aplique la propiedad de linealidad para demostrar que la suma de los determinantes*

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

es un múltiplo de 13.

21. *Demostrar que el determinante*

$$\begin{vmatrix} \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \operatorname{sen}(x+a) & \operatorname{sen}(x+b) & \operatorname{sen}(x+c) \\ \operatorname{sen}(b-c) & \operatorname{sen}(c-a) & \operatorname{sen}(a-b) \end{vmatrix}$$

no depende del valor de x.

R/ $\operatorname{sen}(b-c)\operatorname{sen}(c-b) - \operatorname{sen}(c-a)\operatorname{sen}(c-a) + \operatorname{sen}(a-b)\operatorname{sen}(b-a)$.

22. *Suponga que para dos matrices cuadradas A y B de orden 2 se cumple:*

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} a & 8 \\ 2 & b \end{pmatrix}.$$

Hallar a y b.

Sug: Utilice el hecho de que $|AB| = |A||B|$ y además, $Tr(AB) = Tr(BA)$.

R/ $a = 6$, $b = 16$.

23. *Demuestre que si $D(A) \neq 0$, se verifica que $D\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{D(A)}$.*

24. *Sea $A = \begin{pmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+1 \end{pmatrix}$. Determine todos los valores de x para los cuales A es invertible.*

R/ $x \neq -\frac{1}{3}$.

25. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 4-x & 2\sqrt{5} & 0 \\ 2\sqrt{5} & 4-x & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 4-x \end{pmatrix}$. *Determine todos los valores de* x *para los cuales* $Rng(A) < 3$.

    Sug: Aplique el siguiente resultado: $|A| = 0 \Leftrightarrow Rng(A) < n$, *para* $A \in M_n(\mathbb{R})$.

    $R/\ x = -1, x = 4,\ x = 9.$

26. *Demuestre que la recta que pasa por los puntos* $P = (a, b)$ *y* $Q = (c, d)$ *es determinada por la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & c \\ y & b & d \end{vmatrix} = 0.$$

27. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 6 & m+1 \\ m & -m & 2m-2 & 9 \\ 2m & -m-1 & m+6 & 3m-2 \end{pmatrix}$

    a) *Calcule el determinante de* A.

    $R/\ |A| = -6$ *si* $m = 0$; $|A| = (m-1)(2-m)(3-m)$ *si* $m \neq 0$.

    b) *De acuerdo con a), ¿para qué valores de* m *la matriz* A *es invertible?*

    $R/\ m = 1,\ m = 2$ *o* $m = 3$.

28. *Una matriz* $A \in M_2(\mathbb{R})$ *se llama nilpotente si para algún entero positivo* k, $A^k = 0$. *Pruebe que si* A *es nilpotente, entonces* $D(A) = 0$.

29. *Demuestre que si* B *es una matriz antisimétrica y* n *es impar, entonces* B *no es invertible.*

30. *Sean* $A, B \in M_4(\mathbb{R})$, *tales que* $D(A) = 2$ *y* $D(B) = -2$. *Calcule* $D\left(\frac{1}{2}A^{-1}B^T\right)$.

    $R/ -\frac{1}{16}.$

31. *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *donde* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $|A| = 3$, *calcule el determinante de cada una de las siguientes matrices:*

    a) $B = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad R/\ |B| = -12.$

    b) $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3a+4 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{pmatrix}$ $\quad R/\ |C| = 3.$

32. *Si el determinante de la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, *donde* $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$, *es* $\det(A) = 5$, *calcule los siguientes determinantes:*

a) $\det(3A)$ $\qquad$ R/ $\det(A) = 135$.

b) $\det\left(2A^{-1}\right)$ $\qquad$ R/ $\det\left(2A^{-1}\right) = \frac{8}{5}$.

c) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ d & e & f \end{pmatrix}$ $\qquad$ R/ -5.

33. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales aplicando la Regla de Cramer:*

$$\begin{cases} 2x+y-z+w=-4 \\ x+2y+2z-3w=6 \\ 3x-y-z+2w=0 \\ 2x+3y+z+4w=-5 \end{cases}$$

R/ $S = \{(1,-2,3,-1)\}$.

34. *Dada la siguiente matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$:*

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Muestre que la matriz A es invertible para todos los valores de x.*

R/ $D(A) = 1$.

b) *Determine la matriz inversa de A.*

R/ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

35. *Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=3 \\ x_2+3x_4-x_5=-5 \\ x_1+x_2+x_3-x_5=1 \\ 2x_2+x_3-2x_4-2x_5=0 \\ x_1+x_3+2x_4+x_5=3 \end{cases}$$

a) *Calcule el determinante de la matriz del sistema.*

R/ $\det(A) = 19$.

b) *Sin hacer cálculos, responda: ¿El sistema de ecuaciones anterior tiene solución única?*

R/ *Sí.*

36. *Sean $A, B, C \in M_4(\mathbb{R})$ tales que $D(C) = 216$ y $D(2A-B) = -3$. Calcule $D\left((6A-3B)^{-1} \cdot C\right)$.*

R/ 3.

37. *Si* $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = 8$, *demuestre:*

$$\det\begin{pmatrix} 2a_{12}-3a_{22} & 2a_{11}-3a_{21} & 2a_{13}-3a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23}\end{pmatrix} = 16.$$

38. *Suponga que* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *escrita como*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} \qquad o \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22}\end{pmatrix}$$

donde A *está escrita como una matriz en bloques, es decir* A_{11} *y* A_{22} *no son números reales sino matrices cuadradas y* 0 *es una matriz nula. Entonces*

$$D(A) = D(A_{11})D(A_{22}).$$

De acuerdo a este resultado, demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 6 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 144.$$

39. *Demuestre que* $P = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$, *si* P *es la matriz en bloques.*

Sug: Utilice la Expansión de Laplace para efectuar la demostración.

40. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$. *Calcule* $|A|$, *sin aplicar la Expansión de Laplace u operaciones elementales.*

R/ $|A| = (a^2+1)^2$.

41. *Muestre que* $\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(c-b)$. *Utilice este hecho para demostrar que la matriz* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 25 & 16 \end{pmatrix}$ *es invertible.*

R/ $\det M = 162$.

42. *Si* $|A| = |B| \neq 0$ *y* $|C| = 4$, $|D| = 2$ *donde* $A, B, C, D \in M_5(\mathbb{R})$, *calcule*

$$\left|A^T C^{-1} B^{-1} (3D^T)^{-1}\right| - \left|4CD^{-1}\left(A^{-1}B\right)^T\right|.$$

R/ $\frac{1}{1944} - 2048$.

43. *Sea* $A \in M(n, \mathbb{R})$ *una matriz invertible. Pruebe que* $\det(adj(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

44. *La derivada de* $|A|$ *con respecto a la variable* x, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|A|$, *es igual a la suma de los* n *determinantes que resultan al sustituir de todas las maneras posibles los elementos de una fila o columna de* $|A|$ *por sus derivadas con respecto a* x. *Demuestre:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = 5 + 4x - 12x^2 - 6x^5.$$

45. *Sean* $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix}$. *Teniendo en cuenta que* $|AB| = |A||B|$ *demostrar:*

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^+(a_2b_1 + a_1b_2).$$

46. *Sean* $A, B \in M_n(\mathrm{I\!R})$, *siendo* A *invertible y* $H = A + iB$, *donde* $i^2 = -1$. *Demostrar:*

$$|H|^2 = |A|^2 \cdot \left| I + \left(A^{-1}B\right)^2 \right|.$$

47. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Calcule* $\mathrm{adj}(A)$.

R/ $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

48. *Demuestre que si* $A \in M_2(\mathrm{I\!R})$, *entonces* $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = A$.

49. *Sean* A *y* B *matrices de orden* 2. *Pruebe que,* $\det(A) = \det(B)$ *si y sólo si existe* X *con* $\det(X) = 1$ *tal que* $A = XB$.

50. *Dada* $A \in M_4(IR)$ *suponga que la matriz* B *se obtiene de la matriz* A *por medio de sumar* 5 *veces la primera fila a la fila 2 y luego intercambiar las filas 3 y 4. Si* $|A| = 2$, *calcule* $\left|3A^{-1}B^T\right|$.

R/ -81.

51. *Use solamente propiedades del determinante para verificar que* $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & b+a \end{vmatrix} = 0$.

52. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *con* a, b, c *número reales no nulos. Demostrar que* A *es invertible.*

53. $A \in M_n(\mathrm{I\!R})$ *antisimétrica. Pruebe que si* n *es impar, entonces* $\det A = 0$.

54. *Demostrar que* $|aE_n| = a$, $|E_n(f_i, f_j)| = -1$ *y* $|E_n(af_i + f_j)| = 1$ *donde* E *es una matriz elemental.*

55. *Sean* $A, B \in M_n(\mathrm{I\!R})$ *tales que* $AB = -BA$. *Si* n *es impar demuestre que* A *o* B *no es invertible.*

56. *Si* $B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, *calcule* $\det(A)$.

R/ $\det(A) = \frac{1}{4}$.

57. *Pruebe haciendo uso de operaciones elementales sobre las filas que*

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 3(x+1)(3-x)^2.$$

58. *Demuestre por inducción: Si* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *entonces* $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

59. *Si* $A \in M_3(\mathbb{R})$, *calcule* $\det\left(-2\left(A^tA^{-1}\right)^{-1}\right)$. *R/* -8.

60. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

 a) *Demuestre que* $AA^T = (a^2+b^2+c^2+d^2)I_4$.

 b) *Usando a) calcule* $\det(A)$.

R/ $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

61. *Recuerde que si A es invertible, entonces* $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)}{|A|}$. *Usando este hecho, calcule* A^{-1} *si* $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$.

R/ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -cosx & \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$.

62. *Verifique que la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *no es invertible.*

63. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *tal que A es invertible. Pruebe que* $|\text{adj}(\lambda A)| = (\lambda^n|A|)^{n-1}$ *si* $\lambda \in \mathbb{R}$.

64. *Sean* $A, B \in M_4(\mathbb{R})$, *tales que* $D(A) = -5$ *y* $D\left(B^{-1}\right) = \frac{4}{3}$. *Calcule* $D\left(2B \cdot \text{adj}A^T\right)$.

R/ -1500.

Sug: Aplique el resultado del ejercicio 62 para el caso $\lambda = 1$.

65. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *tal que A es involutiva (*$A^2 = I$*), además la matriz* $M = \frac{1}{2}(A+I)$ *es invertible e idempotente. Pruebe que* $|M| = 1$.

66. *Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad*

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

67. *Considere el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} mx - 3y = 1 \\ 2mx + my = n \end{cases}$$

Determine los valores de m y n para los cuales el sistema:

i) Tenga solución única. *R/* $m \neq -6$, $m \neq 0$.

ii) No tenga solución. *R/* $m = 0$ *y* $n = 0$; $m = -6$ *y* $n = 2$.

iii) Infinitas soluciones. *R/* $m = 0$ *y* $n = 0$; $m = -6$ *y* $n = 2$.

68. *Demuestre, sin desarrollar ninguno de los determinantes, la identidad siguiente:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

69. *Determinar los valores de m para los que el sistema homogéneo admita solución:*

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

R/ Solución única si $m \neq -2$, $m \neq 1$.

$m = 1$; $x = -(y + z)$

$m = -2$; $x = y = z$.

70. *Para el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ ax - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

determine el o los valores del parámetro a, para que el sistema tenga infinitas soluciones. Indique el conjunto solución.

R/ $a = -2$; $S = \{(t, -t/2, -2t) : t \in \mathbb{R}\}$.

71. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Pruebe que:*

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

72. *Considere las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -5 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. *Calcule* $D\left(A^T \cdot B^{-1}\right)$.

R/ 12.

73. *Sean* $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ *y* $P \in M_4(\mathbb{R})$ *la matriz definida por* $P = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. *Pruebe que:*

$$D(P) = D(A+B)D(A-B).$$

74. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, *calcular* $|A - \lambda I|$ *tomando* $\lambda = 8$.

R/ -495.

75. *¿Para qué valores de* $x \in \mathbb{R}$ *de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & x^2 \end{pmatrix}$ *pueden existir matrices cuadradas* 2×2 *no nulas tal que* $AB = O$*?*

R/ $x = \pm 6$.

76. *Demostrar que el valor de un determinante de orden* n *no se altera al cambiar de signo a todos los elementos* $\langle A \rangle_{ij}$ *en los que* $i + j$ *es par.*

77. *Sean* $A, B \in M_4(\mathbb{R})$, *tales que* $|A| = -4$ *y* $|B^{-1}| = \frac{5}{4}$. *Calcule* $|3B \cdot \operatorname{adj}(2A)|$.

R/ $-84934656/5$.

78. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *invertible tal que* $A \cdot \dfrac{\operatorname{adj}(A)}{|A|} = I$. *Pruebe que si* B *es una matriz de orden* n *invertible, entonces*

$$\left(\operatorname{adj}(B^T)\right)^T = |B| \cdot B^{-1}.$$

79. *Sea* $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ *una matriz* 4×4 *donde* $A_1, A-2, A_3, A-4$ *son las columnas de la matriz* A *y* $|A| = 2$. *Calcule:*

    a) $\begin{vmatrix} A_2 & A_1 & A_4 & A_3 \end{vmatrix}$ — *R/* 2.

    b) $\begin{vmatrix} 3A_1 & 2A_2 + A_3 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$ — *R/* $\dfrac{2}{3}$.

80. *Sea* Q *una matriz ortogonal,* $(Q^{-1} = Q^T)$ *y* $|B| = 2$ *siendo* $B \in M_3(\mathbb{R})$, *calcule* $\left|\left(5BQ^2\right)^{-1}\right|$.

R/ $\pm\dfrac{1}{250}$.

81. *Si* $B = P^{-1}AP$ *con* $A, B, P \in M_n(\mathbb{R})$ *y* P *es invertible*

    a) *Muestre que* $|A| = |B|$.

    b) *Si* A *es invertible y si* $A^{-1} = A^T$ *demuestre que* $|2A| = 2^n$ *o* $|2A| = -2^n$.

82. *Considere la matriz* $B = \begin{pmatrix} x & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$

    a) *¿Para qué valores de* x *la matriz* B *es equivalente a la identidad?*

    R/ $x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1$.

    b) *Si* $x = -1$, *¿cuál es el rango de* B*?* — *R/* 2.

83. *Suponga que* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & a & 2b \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3.$

   a) *Usando únicamente propiedades del determinante calcule:*

$$\begin{vmatrix} 1 & a+7 & 14 \\ 2 & a+5 & 10 \\ 0 & 2b+3 & 6 \end{vmatrix}.$$

R/ $6.$

   b) *Utilizando la Regla de Cramer calcule el valor de* y *del siguiente sistema*

$$\begin{cases} x + (a+7)y + 14z = 0 \\ 2x + (a+5)y + 10z = 2 \\ (2b+3)y + 6z = -5 \end{cases}$$

R/ $y = -13.$

84. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *se llaman* **valores propios** *de* A *a los números reales* λ, *tales que* $|A - \lambda I| = 0$. *Halle los valores propios de* A.

R/ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4.$

85. *Determine el valor de* z *en el siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} ax + ay + bz + bw = a + 2b \\ bx + by + cz + dw = b + c + d \\ bx + ay + dz + ew = a + d + e \\ cx + ay + ez + aw = 2a + e \end{cases}$$

Si se sabe que el determinante de la matriz de coeficientes es 42.

R/ $z = 1.$

86. *Sea* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $b_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, *donde* A_{ij} *es la matriz que resulta de quitar a* A *la fila* i *y la columna* j.

   a) *Calcule la matriz* $B = \langle B \rangle_{ij}$. *R/* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

   b) *Verifique que* $AB^T = |A| I_3$.

   c) *Deduzca cuál es la matriz* A^{-1}. *R/* $\frac{1}{|A|}B^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$

87. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *tal que* $A^2 = -I_n$. *Demuestre que* A *es invertible, que* n *es par y que* $|A| = \pm 1$.

88. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $|A| = p \neq 0$. Sea $k \in \mathbb{R}$. Calcular $|A^n|$, $|kA|$ y $|[A^{-1}]^n|$ en función de p y k.*

R/ $|A^n| = p^n$; $|kA| = k^n p$; $|[A^{-1}]^n| = p^{-n}$.

89. *Demuestre usando propiedades de los determinantes que la siguiente ecuación es válida.*

$$\begin{vmatrix} a_1 + db_1 + ec_1 & a_2 + db_2 + ec_2 & a_3 + db_3 + ec_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

90. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tales que $AB = I$. ¿Es válido asegurar que $|A| = 0$?*

91. *Suponque que para una matriz A cuadrada se cumple que $\det(A) = -1$ y $\det(2A) = -16$. ¿Cuál es el tamaño de la matriz A?*

R/ 4×4.

92. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$. *Suponga que B es la matriz que se obtiene después de realizar en A la siguientes transformaciones:*

   1. *Se multiplica A por sí misma.*
   2. *Se cambian las filas 2 y 3 de la matriz.*
   3. *Se multiplican todos los elementos de la segunda columna por -2.*

   Calcule el determinante de la matriz B.

R/ 288.

93. *Sean f_1, f_2 y f_3 las filas uno, dos y tres, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3, tal que $|A| = -2$. Calcule el valor del determinante que tiene por filas $f_1 - f_2$ y $2f_1$, $f_2 + f_3$.*

R/ -4.

94. *Determine una matriz simétrica A que cumpla las siguientes condiciones:*

   i) $A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   ii) $|A| = -7$.

R/ $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

95. *A cada matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *se le asocia el polinomio característico*

$$p(x) = x^2 + (a + d)x + \det(A).$$

   a) *Determine la matriz que tenga como polinomio característico $p(x) = x^2 + x + 1$.*

R/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Si A es invertible, demuestre que el polinomio característico de A^{-1}, es

$$p(x) = x^2 - \frac{a+d}{|A|}x + \frac{1}{|A|}.$$

Sug: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

c) Pruebe que las soluciones de la ecuación característica $x^2 + (a+d)x + \det(A) = 0$ son:

$$x = \frac{1}{2}\left[(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right].$$