Ejercicios recomendados: Cálculo III

Cátedra de MA–1003, II ciclo 2017

Los ejercicos que siguen están tomados del libro:
Claudio Pita Ruiz, *Cálculo Vectorial*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1995.

Ejercicios, semanas 3 y 4

Funciones de varias variables, sección 1

En cada uno de los ejercicios abajo, describir el dominio natural de la función $z = f(x, y)$ dada y hacer un esquema en el que se represente este dominio en el plano xy.

16. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

18. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{\log(1 + 2x^2 + 4y^2)}}$.

30. $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Funciones de varias variables, sección 3

Para cada uno de las funciones $f(x, y)$ dadas en los ejercicios 40–42, demostrar que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ no existe.

40. $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$.

41. $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{y^4 + x^2}$.

42. $f(x, y) = \dfrac{2xy^4}{\sqrt{x^5 + 6y^5}}$.

49. Sea $f(x, y, z) = \dfrac{2x^2 + y^2 - z^2}{x^2 - y^2}$. ¿Dónde está definida esta función? Demostrar que el límite $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$ no existe.

50. Sea $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3}$. ¿Dónde está definida esta función? Demostrar que el límite $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$ no existe. (Sugerencia: acérquese al origen por los ejes coordenados y por la recta $x = y = z$.)

51. Sea $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 z^3 y}{x^6 + y^6}$. ¿Dónde está definida esta función? Demostrar que el límite $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$ no existe.

Funciones de varias variables, sección 4

En los ejercicios 1–2, identificar las expresiones dadas como derivadas parciales de funciones de varias variables respecto de alguna de sus variables. Obtener la derivada parcial indicada.

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^4 y^5 - x^4 y^5}{h}$.

2. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{3y^2 \operatorname{sen}(x + h)^2 + \operatorname{tg}^2(x + h) - 3y^2 \operatorname{sen} x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{h}$.

En los ejercicios siguientes, obtener todas las derivadas parciales de las funciones indicadas.

8. $f(x, y) = (4x^2y^4 - 3x^2 + 8y^3)^3$.

9. $f(x, y) = \operatorname{arcsen} \dfrac{y}{x} + \arccos \dfrac{x}{y}$.

10. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$.

22. $f(x, y) = \log \dfrac{1 - (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$.

25. $f(x, y) = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{1 + y + z} + \log(1 + y + z)$.

27. $f(x, y) = x^2 y^3 z^4 \operatorname{sen}^2 x \cos^3 y \operatorname{tg}^4 z$.

Funciones de varias variables, sección 7

12. Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$ en el punto $(3, 0)$, en la dirección del vector tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

Funciones de varias variables, sección 8

18. Sea $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función $f(x, y, z) := z - x^2 - y^2$.

    (a) Determinar los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en que el gradiente de esta función forma un ángulo de $\pi/3$ con el vector $\boldsymbol{u} = (2, 1, 1)$.

    (b) Determinar los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donde el gradiente de esta función esté en la dirección del vector $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$.

    (c) Determinar los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en que el gradiente de esta función es perpendicular al vector $\boldsymbol{u} = (2, -1, 1)$.

Funciones de varias variables, sección 9

14. Con la superficie $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xyz - 4 = 0$ como superficie de nivel de una función $u = F(x, y, z)$, determinar un vector normal a ella en el punto $\boldsymbol{p} = (1, 1, 1)$.

27. Determinar el punto (o los puntos), si los hay, de la superficie $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ para los que el vector $\boldsymbol{N} = (-2, 3, 6)$ es un vector normal a S.

Funciones de varias variables, sección 10

En los ejercicios 9–11 se da la ecuación de una superficie en el espacio tridimensional y un punto $\boldsymbol{p}$ de ella. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $\boldsymbol{p}$.

9. $z^2 + 3z - x^2 - y^2 - 2 = 0$, $\boldsymbol{p} = (1, 1, 1)$.

10. $x - y^2 - z^2 = 0$, $\boldsymbol{p} = (0, 0, 0)$.

11. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 16z + 54 = 0$, $\boldsymbol{p} = (1, 2, 3)$.

12. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ que sea paralelo al plano $3x + 8y - 5z = 10$.

18. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x$ que sea perpendicular a la recta $x = 3 + 4t$, $y = -2t$, $z = 1 + t$ (con $t \in \mathbb{R}$).

19. Determinar las ecuaciones de los planos tangentes al elipsoide $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 1$ que sean paralelos al plano tangente a la superficie $z = xy$ en el punto $\boldsymbol{p} = (1, 1, 1)$.

32. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ cortan los ejes coordenados en puntos cuya suma de distancias al origen es constante.