Ejercicios recomendados: Cálculo III

Cátedra de MA–1003, II ciclo 2017

Los ejercicos que siguen están tomados del libro:
Claudio Pita Ruiz, *Cálculo Vectorial*, Prentice-Hall, México, 1995.

Ejercicios, semanas 1 y 2

Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

66. Hallar los puntos de intersección de la recta $x = 3 + t,\ y = 2 - t,\ 2 = 4 - 5t$, con los planos coordenados.
67. Hallar el punto de intersección de la recta $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$ con el plano $2x+y-z = 1$.
68. Verificar que la recta $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z}{4}$ se encuentra contenida en el plano $x - 2y + 3z - 4 = 0$.
69. Comprobar que la recta $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-1}{13}$ se encuentra contenida tanto en el plano $5x + y + z = 0$ como en el plano $2x + 3y - 2z = -5$.

En cada uno de los ejercicios 70–73, determinar las ecuaciones paramétricas de las rectas que resultan de la intersección de los planos dados.

70. $2x + 3y - z - 4 = 0,\ 3x + y - z = 0$.
71. $3x + y - 4z = 0,\ 5x + z = 2$.
72. $x + y + z = 2,\ x - y + z = 3$.
73. $x = 0,\ y = 0$.
74. Verificar que las dos rectas

$$L_1 = \{\, x = 3t,\ y = 2t,\ z = t;\ t \in \mathbb{R} \,\}, \qquad L_2 = \{\, x = -3t,\ y = -t,\ z = t;\ t \in \mathbb{R} \,\}$$

se cortan en un punto. Determinar la ecuación del plano en el que éstas se encuentran.

75. El punto $\boldsymbol{p} = (2, 1, -1)$ se encuentra en el plano $x - y + z = 0$. Determinar la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por $\boldsymbol{p}$ y que se encuentran sobre el plano dado.

Curvas en el espacio, sección 2

21. Demostrar que el camino $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(t) := (a\cos^2 t,\ 0.5b\,\mathrm{sen}^2\,t,\ 0.5c\,\mathrm{sen}^2\,t)$ se encuentra sobre el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

22. Demostrar que el camino $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(t) := (t^2 + t + 1,\ t^2 - 1,\ t + 2)$ se encuentra sobre el plano $z = x - y$.

Curvas en el espacio, sección 3

26. Determinar los puntos en que la recta tangente a la curva descrita por el camino $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(t) := (3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3)$ es paralela al plano $3x + y + z = 5$.

Curvas en el espacio, sección 4

En los ejercicios 24–29, determinar una función $\boldsymbol{f}\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que parametrice la curva indicada.

24. El eje x, recorrido en su dirección positiva.

25. El eje y, recorrido en su dirección negativa.

26. El eje z, recorrido en su dirección negativa.

27. La parte de la recta $y = 2x = 3z$ que se encuentra en el primer octante, comenzando en el origen.

28. La parte de la recta que resulta de la intersección de los dos planos $x + 2y - z = 0$, $3x - y + 5z = 0$, correspondiente a $z \geq 0$, comenzando en el origen.

29. El círculo que resulta de la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = 4$, comenzando en el punto $(0, 2, 4)$, con el sentido de recorrido:

$$(0, 2, 4) \to (-2, 0, 4) \to (0, -2, 4) \to (2, 0, 4) \to (0, 2, 4).$$

Curvas en el espacio, sección 6

3. Considerar el camino $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\boldsymbol{f}(s) := \left(\alpha\cos\frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\ \alpha\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\ \frac{\beta s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).$$

Este es la parametrización por longitud de arco de la hélice circular $\boldsymbol{g}(t) = (\alpha\cos t, \alpha\,\mathrm{sen}\,t, \beta t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Calcular $\boldsymbol{f}''(s)$. Constatar que este vector es ortogonal a $\boldsymbol{f}'(s)$ para toda $s \in \mathbb{R}$. Calcular $\|\boldsymbol{f}''(s)\|$.

Curvas en el espacio, sección 10

3. Demostrar que la curva $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(t) := (3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3)$ tiene curvatura y torsión iguales en todos sus puntos.

6. Considerar la curva $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(t) := (t\cos t,\ t\operatorname{sen} t,\ t)$. Demostrar que las funciones coordenadas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ de la función $\boldsymbol{f}$ satisfacen $z^2 = x^2 + y^2$ (que es la ecuación de un cono).

   (a) Demostrar que el ángulo que forma la recta tangente con el eje z es constante.

   (b) Demostrar que la recta normal en cualquier punto de la curva es perpendicular al eje z.

   (c) Demostrar que el ángulo que forma la recta binormal con el eje z es constante.

   (d) Calcular la curvatura de $\boldsymbol{f}$.

   (e) Calcular la torsión de $\boldsymbol{f}$.

   (f) Comprobar que el cociente de la curvatura entre la torsión es constante.

   (A la curva imagen del camino $\boldsymbol{f}$, se le llama *hélice cónica*).