Ejercicios de Álgebra Lineal Parcial 1

1. Ejercicios de respuesta corta

   a) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ encuentre la entrada c_{12} de la matriz A^2

   b) Si para $k \in \mathbb{R}$ el sistema $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + hy = k \end{cases}$ tiene solución única, verifique que $h \neq -6$.

   c) Muestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \end{pmatrix}$ es equivalente a $B = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

   d) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, verifique que el sistema $Ax = 0$ tiene infinitas soluciones.

   e) Verifique que $\{(1, -1, -1)\}$ es solución del sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$

   f) ¿Es $(3, 4, -2)$ solución del siguiente sistema? $\begin{cases} 5x - y + 2z = 7 \\ -2x + 6y + 9z = 0 \\ -7x + 5y - 3z = -7 \end{cases}$

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y - \alpha z = 1 \\ \alpha x + y - z = 1 \\ -\alpha x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

   a) Determine el valor de α para que el sistema tenga infinitas soluciones.

   b) ¿Para qué valores de α el sistema es inconsistente?

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (b+1)x + (b+4)y - (b+4)z = 1 \\ bx + 4y - 4z = 2 \\ x + by - 2z = b + 1 \end{cases}$$

Determine los valores de b para que el sistema:

a) Tenga solución única.

b) Tenga infintas soluciones.

c) No tenga solución.

4. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 2x + y - z = \beta \\ 2x + 4y - 6z = 2\alpha + 2 \end{cases}$$

Demuestre que el sistema es inconsistente sin importar los valores de α y β.

5. Considere la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -\alpha \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de α la matriz B tiene rango menor a 3?

b) ¿Qué valores de α hacen que el sistema $Bx = 0$ tenga soluciones no triviales? ¿Cuáles son estas soluciones?

6. Ejercicios de respuesta corta

a) Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz triángular superior con entradas en la diagonal todas distintas de cero, muestre que A es invertible.

b) Muestre que si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ entonces $4(A - A^t)$ es antisimétrica.

c) Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que si A es invertible, entonces $X = BA^t$ es la solución de la ecuación $(A^{-1}X^t)^t - B = 0$.

d) Con un ejemplo verifique que no necesariamente se cumple, que para cualesquiera matrices $A, B \in M(n, \mathbb{R})$, $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

e) Considere la ecuación $A^2+3A = I$, con $A, I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e I la matriz identidad. Verifique que A es invertible. ¿Cuál es la inversa de A?

f) Si A es antisimétrica, muestre que también lo es B^tAB, para cualquier matriz B del tamaño apropiado.

g) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Muestre que $A^3 = 0_3$, donde 0_3 es la matriz cero 3×3.

h) Suponga que A es una matriz $n \times n$ que satisface la ecuación $A^2 - 2A + I = 0$. Muestre que $A^3 = 3A - 2I$, y que $A^4 = 4A - 3I$.

i) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demuestre que $A^2 = I, B^2 = I$ y $AB = -BA$.

j) Si $A \in M(3, \mathbb{R})$ es triangular superior muestre que A^t es triangular inferior.

k) Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matriz simétrica e invertible, muestre que A^{-1} es simétrica.

l) Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $A^3 = 0$. Demuestre que $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

m) Sea $\{x, y\}$ un conjunto linealmente independiente. Muestre que $\{x - y, x + y\}$ también es un conjunto linealmente independiente.

n) Sea $\{x, y\}$ un conjunto linealmente independiente. Muestre que $\{x - y, y - x\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

ñ) Sea $\{v_1, ..., v_r\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente. Muestre que si A es una matriz $n \times n$ invertible entonces $\{Av_1, ..., Av_r\}$ es también un conjunto linealmente independiente.

o) Muestre que si $\{v_1, v_2\}$ está formado por vectores linealmente independientes entonces $\{-v_1 + 2v_2, 3v_1 + v_2\}$ también son linealmente independientes.

7. Considere la matriz

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de x, la matriz B es equivalente a la matriz identidad?

b) Determine B^{-1} cuando $x = 2$.

c) Si $x = 1$ ¿Cuál es el rango de B?

8. Considere las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Utilizando álgebra de matrices encuentre el valor de X en la ecuación matricial $(XC^t)^t = (3X)^t + A$.

b) Usando lo encontrado en el item anterior y las matrices C y A, calcule el valor de la matriz X.

c) ¿Es el vector $(2,-3,6)^t$ combinación lineal de los vectores columna de la matriz C?

9. Encuentre los valores de a para los cuales el vector $v=(1,3,-3,5)$ es combinación lineal de los vectores $v_1=(1,a+4,a,3), v_2=(1,5,0,4)$ y $v_3=(3,a^2+3a+3,3a,a^2)$.

10. Para las siguientes ecuaciones matriciales utilice álgebra de matrices para hallar la matriz X. Suponga que A, B y C son matrices de ordenes adecuados para que se puedan realizar las operaciones respectivas y que I es la matriz identidad.

    a) $(3A+XB)^t=-(2X)^t+B$, suponiendo que $2I+B$ es invertible.

    b) $X-E+(X^tB)^t=-CA^tX$, suponiendo que $I+CA^t+B^t$ es invertible

    c) $(XB)^t=C-(\alpha XA)^t$

    d) $XA^t=I_n+(BX^t)^t$ suponiendo que $A-B$ es invertible

11. Considere $D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ¿son los vectores columna de la matriz D linealmente independientes?

12. Sean $x=(2,2\alpha,0)^t$, $y=(5,5,-15)^t$ y $z=(-1,0,\alpha)^t$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$.

    a) ¿Para qué valores de α los tres vectores forman un conjunto linealmente independiente?

    b) ¿Es el vector $(1,4,1)^t$ combinación lineal de los vectores x,y y z para $\alpha=4$?

13. Ejercicios de respuesta corta

    a) Sea $A\in M(3,\mathbb{R})$ invertible. Si $A^2=4A$ pruebe que $\det(A)=64$.

    b) Sea $A\in M(3,\mathbb{R})$. Verifique que si $\det A=3$ entonces $\det(-2A^2)=-72$.

    c) Use determinantes para decidir si el conjunto $\{(1,2,1),(2,1,-1),(-1,1,1)\}$ es linealmente independiente.

    d) Sean $A,B\in M(3,\mathbb{R})$, con $\det(A^t)=4$ y $\det(B)=3$, calcule $\det(2(B^tA)^{-1})$.

    e) Sea $A\in M(2,\mathbb{R})$. Muestre que si $A^2=2A$ y A es invertible entonces $\det(A)=4$.

f) Muestre que $\det(AA^t) \geq 0$ para toda matriz $A \in M(n, \mathbb{R})$.

g) Verifique con un ejemplo que la fórmula $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ no es necesariamente verdadera.

h) Muestre que si $A \in M(n, \mathbb{R})$ es una matriz antisimétrica, con n impar, entonces $\det A = 0$.

i) Una matriz $Q \in M(n, \mathbb{R})$ se dice **ortogonal** si $Q^{-1} = Q^t$. Demuestre que si Q es ortogonal entonces $\det Q = \pm 1$.

j) Sean $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ con $\det(B) = 4$. Si $\det(AB) = 8$ calcule $\det(A^{-1})$.

k) Un par de matrices $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ se dicen **semejantes** si existe una matriz P invertible tal que $A = P^{-1}BP$. Demuestre que si A y B son matrices semejantes entonces $\det(A) = \det(B)$.

l) Si A es una matriz $n \times n$ tal que $A^2 - 5I = 4A$ muestre que $\det(A) \neq 0$.

m) Sabiendo que $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $|A| = 4$ y $|B| = 3$. Calcule $|2(A^tB)^t(3AB)^{-1}|$

14. Determine los valores de k para los cuáles

$$\det\begin{pmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{pmatrix} = 0.$$

15. Calcule el siguiente determinante únicamente utilizando propiedades del determinante. NO utilice operaciones elementales de fila

$$\begin{vmatrix} 1 & a+2 & 8 \\ 1 & a+3 & 12 \\ 1 & a+5 & 20 \end{vmatrix}.$$

16. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ tal que $|A| = 5$. Encuentre el determinante de la siguiente matriz B aplicando únicamente propiedades del determinante y la información anterior

$$B = \begin{pmatrix} 3b+3c & 2c+2a & 4b+4a \\ 3a+3b & 2c+2b & 4a+4c \\ 3c+3a & 2b+2a & 4b+4c \end{pmatrix}$$

17. Considere la matriz $B = \begin{pmatrix} k & 1 & k^4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k^5 \end{pmatrix}$

a) Calcule el determinante de B para encontrar los valores de k, tales que B tenga rango menor a 3.

b) Calcule la inversa de B para $k = 2$.

c) ¿Para qué valores de k la forma escalonada reducidad de B es I_3?

18. Suponga que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & a & 2b \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

a) Utilizando únicamente propiedades del determinante calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & a+7 & 14 \\ 2 & a+5 & 10 \\ 0 & 2b+3 & 6 \end{vmatrix}$$

b) Utilizando la regla de Cramer calcule el valor de y del siguiente sistema

$$\begin{cases} x + (a+7)y + 14z = 0 \\ 2x + (a+5)y + 10z = 2 \\ (2b+3)y + 6z = -5 \end{cases}$$

19. Suponga que $\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{vmatrix} = 3$. Calcule $\begin{vmatrix} 3r & 3p & 3q \\ q & r & p \\ 3p & 3q & 3r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} p+2q & q+2r & r+2p \\ 3r-3q & 3p-3r & 3q-3p \\ q & r & p \end{vmatrix}$.

20. Ejercicios de respuesta corta

a) Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, muestre que $proy_{v_1 \times v_2} v_1 = 0$.

b) Sean $u = (3,4)$, $v = (1,\alpha)$. Si $||u|| = ||v||$ muestre que $\alpha = \pm 2\sqrt{6}$.

c) Si $u = (1,2,k)$ y $v = (3, k-1, -1)$ son ortogonales, muestre que $k = -1$.

d) Verifique que los vectores $(-2, b+c, a, 0)$ y $(a, 0, 2, b)$ son ortogonales.

e) Sean $u = (1,-1)$ y $v = (2,0) \in \mathbb{R}^2$. Calcule la proyección ortogonal de u sobre v.

f) Sean u y v vectores no nulos. Si $u = \beta v$, $\beta \in \mathbb{R}$, muestre que el ángulo entre el vector u y el vector v es cero ó 180°.

g) Encuentre el valor de k para que $u = (1,2,k)$ y $v = (3, k-1, 1)$ formen un ángulo de 270°.

h) Hallar un vector perpendicular a $u = (2,3,4)$ y $v = (-1,3,-5)$ con norma 1.

i) Calcule el área del triángulo que determinan los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\overrightarrow{u} = (0,2,0)$ y $\overrightarrow{v} = (1,3,-3)$.

j) Si los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^2$ forman un ángulo de $60°$ y $||\overrightarrow{u}|| = 3$. Determine el valor de $||\overrightarrow{v}||$ para que $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ sea perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

k) Calcule el área del triángulo de vértices $(1,1,0), (-1,0,2)$ y $(0,1,2)$.

l) Determine todas las constante a tales que $||(1,a,-3,2)|| = 25$.

m) Determine el coseno del ángulo que forman los vectores $(1,2-1,4)$ y $(3,-2,4,1)$.

n) En $\mathbb{R}^n$, si u es ortogonal a v y w. Verifique que u es ortogonal a $2v + 3w$.

ñ) Determine el área del paralelogramo con lados adyacentes $\overrightarrow{u} = (1,3,-2)$ y $\overrightarrow{v} = (3,-1,-1)$.

o) Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, demuestre que

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$$

p) Si u y v son vectores paralelos en $\mathbb{R}^3$, demuestre que $u \times v = 0$.

q) Demuestre que

$$||(a,b,0) \times (c,d,0)|| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$$

21. Considere los puntos $A = (1,0,1), B = (1,1,3)$ y $C = (1,2,1)$.

a) Verifique que el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles.

b) Encuentre el punto $D \in \mathbb{R}^3$ tal que el cuadrilátero $\square ABCD$ sea un paralelogramo.

c) Calcule $Proy_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}$.

d) Determine el área del triángulo $\triangle ABC$

22. Considere los puntos $A = (-1,0,3), B = (0,1,1)$ y $C = (-1,-3,0)$. Encuentre:

a) El área del triángulo determinado por los vértices A, B y C.

b) La proyección de $\overrightarrow{AC}$ sobre el vector $\overrightarrow{AB}$

c) La longitud de la altura sobre $\overrightarrow{AB}$ usando (b).

23. Considere los vértices $A = (5,2,2), B = (4,0,1), C = (0,0,1)$ y $D = (1,2,2)$.

a) Verifique que los vértices A, B, C y D determinan un paralelogramo.

b) Encuentre el área del parelelogramo $\square ABCD$.

c) Encuentre la medida del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

d) ¿Es el paralelogramo $\square ABCD$ un rectángulo ?

e) Calcule la proyección de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$.

24. Considere el triángulo de vértices dados por $P = (0, 1, 5)$, $Q = (1, 0, -3)$ y $R = (3, 2, 0)$.

a) ¿Es el triángulo $\triangle PQR$ rectángulo?

b) Calcule el área del triángulo determinado por los vértices P, Q y R.

c) Calcule el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

d) Encuentre un vector ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ simultaneamente.

e) Si $S = (1, 0, 0)$ encuentre el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}$ y $\overrightarrow{PR}$.

25. Considere el triángulo de vértices dados por $P = (4, 1, 5)$, $Q = (1, 0, -3)$, $R = (3, 2, -4)$.

a) Demuestre que el triángulo $\triangle PQR$ es rectángulo sobre el vértice Q.

b) Calcule el área del triángulo determinado por los vértices P, Q y R.

c) Calcule la longitud de la altura sobre $\overrightarrow{PQ}$.

26. Supóngase que dados dos vectores diferentes $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Sea D el punto medio del segmento BC. Demuestre que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

27. Sean $u = (0, 2, 0, -1)$ y $v = (1, -3, 3, 0)$ vectores en $\mathbb{R}^4$.

a) Calcule $||u - 2v||$.

b) Calcule θ el ángulo entre u y $2v$.

c) Calcule $Proy_v u$.

d) Encuentre dos vectores ortogonales a y b tales que $a + b = u$ y a sea paralelo a v.

28. Considere el paralelogramo cuyos vértices son $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (5, 2, 2)$ y $D = (4, 0, 1)$.

   a) Calcule el área del paralelogramo de vértices $ABCD$.
   b) ¿Es el triángulo formado por los vértices A, B, C rectángulo?
   c) Encuentre el perímetro del paralelogramo $ABCD$.
   d) Calcule la altura de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AD}$.
   e) Encuentre el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CA}$

29. Considere los puntos $A = (2, 3, -1, 1), B = (3, 2, 2, -1), C = (0, 2, -1, 2)$ en $\mathbb{R}^4$.

   a) Calcule $Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}$.
   b) Encuentre dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ ortogonales, con $\overrightarrow{a}$ paralelo a $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{BA}$.
   c) Determine el área del triángulo de vértices A, B, C.

30. Sea $A = (3, 0, 0)$, $B = (1, 0, 2)$ y $C = (2, 3, 0)$ puntos en $\mathbb{R}^3$.

   a) Determine si el triángulo ABC es rectángulo, obtusángulo o acutángulo.
   b) Determine el perímetro del triángulo ABC.
   c) Calcule la proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el vector $\overrightarrow{AC}$.
   d) Determine el área del triángulo ABC.
   e) Determine un punto D de manera que $ABCD$ sea un paralelogramo.

31. Considere el paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C, D donde los vértices son dados por $A = (1, 2, -3), B = (1, -1, -5), C = (1, 3, -5)$. Encuentre:

   a) El vértice D, el cual hace que $\square ABCD$ sea un paralelogramo.
   b) El seno del ángulo del vertice B.
   c) Calcule el área del triángulo determinado por los vértices A, B y C.
   d) Calcule la longitud de la proyección de $\overrightarrow{CA}$ sobre $\overrightarrow{CB}$.