UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FCULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

MA-1005 Ecuaciones Diferenciales
II Ciclo del 2017

Lista de ejercicios # 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1

Soluciones de ecuaciones diferenciales

1. Muestre que la familia paramétrica

$$x^3 + y^3 = 3Cxy$$

es una solución implícita de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}.$$

2. Verifique que

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$$

es una solución de la ecuación

$$2y = xy' + \ln y'.$$

3. Muestre que la función $y(\theta)$ dada por

$$y = \cos\theta \int_0^\theta \sec^3\phi \, d\phi.$$

satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + y \cdot \tan\theta = \sec^2\theta, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Muestre que las tres funciones

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\ y_3 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

son soluciones de la ecuación diferencial $y''' = y$.

5. Sea λ una constante dada, y ponga $T(t) = e^{\lambda t}$.

   - Si $\lambda = 0$, ponga $X(x) = mx + b$ (donde m, b son constantes arbitrarias).

- Si $\lambda < 0$, ponga $X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$ (donde A, B son constantes arbitrarias).
- Si $\lambda > 0$, ponga $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ (donde A, B son constantes arbitrarias).

Muestre que en cualquiera de los casos, la fucnción de dos variables $u(x,t) = T(t)\cdot X(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ecuaciones en variables separables y reducibles a ellas.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales mediante separación de variables:

   (a) $\left(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2\right)\dfrac{dy}{dx} = 1.$

   (b) $\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{xy}\right)\dfrac{dy}{dx} = 1.$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1-y^2}.$

   (d) $\csc y\, dx + \sec^2 x\, dy = 0.$

   (e) $(\sqrt{x} + x)\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y} + y.$

   (f) $(xy - 2x - y + 2)\, dy = (xy + 3x + y + 3)\, dx.$

2. Sean α, β, k constantes dadas. Halle la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

3. Resuelva la ecuación diferencial

$$(y')^2 + (x+y)y' + xy = 0.$$

   Muestre que existen (al menos) dos soluciones de esta ecuación diferencial que pasan por el punto $(0,1)$.

4. (1PII2016) Realice el cambio de variable $u = x^2\sqrt{y}$ para resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y(2x^2\sqrt{y} + 2)dx + x(x^2\sqrt{y} + 2)dy = 0, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

5. (1PI2012) Realice un cambio de variable apropiado para resolver la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} - y = 2\frac{x^3}{y}e^{y/x}.$$

6. Realice el cambio de variable indicado para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

(a) $x^2 + y\cos(xy) + x\cos(xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$, mediante el cambio de variable $u = yx$.

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y^2 - x^4}{4xy}$, mediane el cambio de variable $y = vx$.

(c) (1PI2015) $y' = -\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{y^2}{2}$, mediante el cambio de variable $u = xy$.

(d) (1PII2014) $y' = (x+y)^2 - 2(x+y) - 1$, mediant el cambio de variable $w = x + y$.

(e) (Rep1PI2013) $(xy^2 - 1)\,dx + 2x^2y\,dy = 0$, mediante el cambio de variable $y = zx^n$ (para un valor apropiado de la constante n).

(f) (1PII2012) $(1 + y^2e^{2x})y' + y = 0$, mediante el cambio de variable $y = ue^{mx}$ (para un valor apropiado de la constante m).

(g) (1PI2005) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^5}{x^2 - 2xy^4}$, mediante el cambio de variable $x = zy^n$, escogiendo un valor apropiado de n

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Si $F(x, y)$ es una función homogénea de grado 0 (es decir, $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$ para todo $\lambda \neq 0$) la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad \text{“Ecuación diferencial homogénea”}$$

se convierte en una de variables separables mediante el cambio de variables $y = ux$.

1. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^2 - x^2}{2xy}$.

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}$.

   (d) $x^2\dfrac{dy}{dx} - xy = (y - x)(y + x)$.

   (e) $x\dfrac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. (1PI2014) Resuelva la ecuación diferencial

$$(x^2y^2 - xy^3)\,dx + 2x^3y\,dy = 0.$$

3. (1PII2011) Para $x > 0$, halle la solución general de la ecuación diferencial

$$y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$$

4. (1PI2011) Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = \sqrt{y + \frac{x^2}{2}},$$

   realizando el cambio de variable $u = \sqrt{y + \frac{x^2}{2}}$.

5. (1PII2006) Considere la ecuación diferencial

$$2xy^3\,dx\,+(x^2y^2-1)\,dy=0.$$

Determine el valor de la constante n, tal que el cambio de variable $y=z^n$ transforma la ecuación dada en una ecuación diferencial homogénea. Utilice esto para resolver la ecuación diferencial dada.

6. Sea $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **cualquier** función (diferenciable), y considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{ax+by+h}{cx+dy+k}\right). \tag{1}$$

Note que si $h=k=0$, la ecuación (1) es homogénea.

(a) Muestre que si las rectas rectas $ax+by+h=0$ y $cx+dy+k=0$ se intersecan en el punto (x_0,y_0), el cambio de variables $X=x-x_0$ y $Y=y-y_0$ transforma la ecuación (1) en la ecuación homogénea

$$\frac{dY}{dX}=F\left(\frac{aX+bY}{cX+dY}\right).$$

(b) Muestre que si las rectas rectas $ax+by+h=0$ y $cx+dy+k=0$ **no** se intersecan, el cambio de variable $z=ax+by$ transforma la ecuación (1) en una de variables separables.

(c) Use los resultados anteriores para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

i. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+3y+1}{x+2y+3}.$

ii. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+3y+1}{\sqrt{8x+12y+4}}.$

7. Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}.$$

Ecuaciones Diferenciales Exactas

La ecuación diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

es exacta si y solamente si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{(“criterio de exactitud"),}$$

en cuyo caso existe una función $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \ \text{ y } \ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y),$$

y la solución general de (2) está dada por $F(x,y) = C$.

1. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

   (a) $[x^2 + y\cos(xy)]\,dx + x\cos(xy)\,dy = 0$.

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2 - x}{y - x^2y}$.

   (c) $\dfrac{dr}{d\varphi} = \dfrac{r^2 \sin\varphi}{2r\cos\varphi - 1}$.

   (d) $(xy^2 + 2x^3)\,dx + x^2y\,dy = 0$.

   (e) $(x^2 + 2ye^{2x})\dfrac{dy}{dx} + 2xy + 2y^2e^{2x} = 0$.

   (f) $x\cos y\,dy = (2x - \sin y)\,dx$.

2. (1PII2016) Considere la ecuación diferencial

$$\left(\frac{y}{(x+y)^2}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{(x+y)^2}\right)dy = 0. \tag{3}$$

   (a) Verifique que dicha ecuación es exacta.

   (b) Hallar la solución general de la ecuación (3).

3. Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1-x^2)}, \\ y'(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

4. Halle funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ tales que las siguientes ecuaciones diferenciales sean exactas. Resuelva la ecuación diferencial resultante.

   (a) $M(x,y)\,dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \dfrac{1}{x}\right)\,dy = 0$.

   (b) $\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{x}{x^2+y}\right) + N(x,y)\,dy = 0$.

Factor Integrante

Una función no identicamente cero $\rho = \rho(x, y)$ es un factor integrante de la ecuación diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

si la ecuación diferencial

$$\rho M + \rho N\frac{dy}{dx} = 0$$

es exacta (es decir $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu N)$).

Como caso particular, sabemos que esta ecuación diferencial posee un factor integrante $\rho = \rho(u)$ que depende de una única variable $u = u(x, y)$ si y solamente si el cociente

$$-\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M\dfrac{\partial u}{\partial y} - N\dfrac{\partial u}{\partial x}} = F(u)$$

es una función $F(u)$ que solo depende de u. En este caso el factor integrante está dado por $\rho = e^{\int F(u)\,du}$.

1. (a) Usando el criterio de exactitud, muestre que la ecuación diferencial

    $$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

    posee un factor integrante $\rho = \rho(u)$ que depende de una única variable $u = u(x, y)$ si y solamente si el cociente

    $$-\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M\dfrac{\partial u}{\partial y} - N\dfrac{\partial u}{\partial x}} = F(u)$$

    es una función $F(u)$ que solo depende de u. En este caso el factor integrante está dado por $\rho = e^{\int F(u)\,du}$.

    (b) Deduzca criterios para determinar cuando la ecuación diferencial $M dx + N dy = 0$ posee factor integrante que dependa únicamente de x o únicamente de y.

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

    (a) (Rep1PII2015) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y^2 - x^2}{2xy}$.

    (b) (Rep1PII2015) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 4x^2y^2 + 6e^{-y}}{3xe^{-y} - 2x^3y}$.

    (c) (1PII2013) $(1 + y^2)\,dx + (x - e^{\arctan(y)})\,dy = 0$.

(d) (Rep1PI2013) $(xy^2 - 1)\,dx + 2x^2y\,dy = 0$.

3. (Rep1PI2014) Encuentre todas las funciones $f(x, y)$ tales que la ecuación diferencial

$$(x + y)\,dx + \left(\frac{x}{2} + f(x, y)\right)\,dy = 0,$$

tiene por factor integrante $\rho(y) = y$. Luego resuelva la ecuación para las $f(x, y)$ que encontró.

4. (1PII2014) Halle la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x^2 - \sin^2(y))dx + x\sin(2y)dy = 0 \\ \\ y(2013) = 2014\pi. \end{cases}$$

5. (1PII2011) Resuelva la siguiente ecuación

$$\left(\frac{e^{-y}}{x^2} + 2x^2y\right) + x^3(1 + y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

hallando un factor integrante de la forma $\rho(x, y) = x^{-1}f(y)$.

6. (1PI2011) Halle una función $N(y)$ tal que $\rho(x, y) = 3xy^2$ sea un factor integrante de la ecuación

$$\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{xy}\right)\,dx + N(y)\,dy = 0.$$

Resuelva la ecuación diferencial.

7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales, hallando un factor integrante $\rho = x^ay^b$ para valores apropiados de las constantes a y b:

   (a) $(x^2y + 2y^4)\,dx + (x^3 + 3xy^3)\,dy = 0$.

   (b) $(2x^2y^3 - xy)\,dx + (x^3y^2 + x^2)\,dy = 0$.

8. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales, hallando un factor integrante que dependa sólamente de x o de y.

   (a) $2xy^3\,dx + (x^2y^2 - 1)\,dy = 0$.

   (b) $(2y\sin x - \cos^3 x)\,dx + \cos x\,dy = 0$.

   (c) $dy = \dfrac{x}{x^2y + y^3}\,dx$.

   (d) $(e^{-x} - \sin y)\,dx + \cos y\,dy = 0$.

9. (Rep1PI2017) Resuelva la ecuación diferencial

$$\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^{3/2}}{3x}\right) + (\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2xy)\frac{dy}{dx} = 0,$$

multiplicando por un factor integrante apropiado.

10. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales, hallando un factor integrante $\rho = \rho(u)$ de la forma indicada

    (a) $(y^3 + xy^2 + y)\, dx + (x^3 + x^2 y + x)\, dy = 0$; $u = xy$.

    (b) $(x + (x^2 + y^2)^2)\, dx + y dy = 0$; $u = x^2 + y^2$.

    (c) $2\left(x^2 \cos x + x \cos y + x \sin x + y \cos x\right) - \left(\cos y + \sin x - 2(x^2 + y) \sin y\right) \dfrac{dy}{dx} = 0$; $u = x^2 + y$.

Ecuaciones diferenciales lineales (de orden 1)

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x) \qquad \text{“Ecuación Lineal de primer orden”},$$

tiene $\rho = e^{\int P(x)\, dx}$ como factor integrante.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

    (a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x} y = x^5 e^x$.

    (b) $x^2 \dfrac{dy}{dx} + x(x+2)y = e^x$.

    (c) $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2$.

    (d) $\cos\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r = \cos^2\theta$.

2. (1PII2012) Realice el cambio de variable $z = \tan y$ para resolver la ecuación diferencial

$$y' + x \sin(2y) = x e^{-x^2} \cos^2(y).$$

3. Realice el cambio de variable $v = \ln y$ para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - y x^3 e^x = \frac{2y \ln y}{x}$$

4. (1PI2015) Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y^2 - 1}{(y^2 - 1)\sqrt{y^2 - 1} - x}.$$

5. (Verifique que) La ecuación diferencial

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x)$$

se transforma en una ecuación lineal mediante el cambio de variable $u = f(y)$. Use lo anterior para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

    (a) $\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y} \sin x$.

    (b) $\sin y \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\cos y}{x} = e^x$.

Bernoulli

Sea $n \neq 0, 1$. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)y^n \qquad \text{“Ecuación de Bernoulli”}$$

se convierte en lineal mediante el cambio de variable $u = y^{1-n}$.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

   (a) $\dfrac{dy}{dx} - y\sin x = \sin(2x)y^2$.

   (b) $t^2\dfrac{dy}{dt} + y^2 = ty$.

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$.

   (d) $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4$.

2. (1PII2011) Resuelva la siguiente ecuación diferencial, realizando el cambio de variable $u = e^{xy}$:

$$x\frac{dy}{dx} + y + x = xe^{2xy}.$$

3. (Rep1PI2007) Resuelva la siguiente ecuación diferencial, realizando el cambio de variable $y = xu$:

$$x\frac{du}{dx} + \frac{1-x^2}{1+x^2}u = \frac{4\sqrt{x}\,\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}u^{1/2}.$$

4. (a) Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y\sin x + y^2\sin(2x).$$

   (b) Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sin y + x^2\sin(2y)}.$$

Ricatti

Sean $Q(x)$ y $R(x)$ funciones no idénticamente cero. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) + y^2Q(x) = R(x) \qquad \text{“Ecuación de Ricattii”.}$$

Si se conoce una solución particular y_p, el cambio de variable $z = y - y_p$ transforma esta ecuación en una ecuación de Bernoulli (con exponente $n = 2$).

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Ricatti:
   (a) $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x$; $y_p = \sec x$.
   (b) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} - y^2 = -\dfrac{1}{x^2}$; $y_p = \dfrac{1}{x}$.
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}$; $y_p = \sin x$.
2. (1PII2015) Considere para $x > 0$ la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{x^2} + y^2y' = \left(\frac{1}{x} + y^3 - 1\right)^2.$$

   Resuelva la ecuación diferencial mediante el cambio de variable $u = \frac{1}{x} + y^3 - 1$.

Variable ausente

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:
   (a) $xy'' = y'$.
   (b) $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$.
2. (1PI2012) Resuelva la ecuación diferencial $yy'' = (y')^2$.
3. (Rep1PI2014) Resuelva la ecuación diferencial

$$y^2y'' = 2y(y')^2 + (y')^3.$$

4. (1PI2014) Resuelva el problema de valores iniciales $\begin{cases} y(\ln y + 1)y'' + (y')^2 = yy', \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$
5. Determine la solución de la ecuación diferencial $yy'' = y^2y' + (y')^2$ que satisface $y'(0) = 1$ y $y'(0) = 2$.

6. Sea $\lambda \neq 0$, y considere la ecuación diferencial

$$xy'' + (\lambda x + 3)y' + 2\lambda y = 0.$$

Muestre que el cambio de variable $u = x^2 y$ transforma la ecuación diferencial en una de variable ausente, y use este resultado para hallar la solución general de esta ecuación diferencial:

$$y(x) = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2 e^{-\lambda x}(\lambda x + 1)}{x^2}.$$

Ecuaciones diferenciales lineales

EDLCC

1. (a) Sean a, b, c constantes dadas con $a \neq 0$. Cuál es la solución general de la ecuación diferencial
$$ay'' + by' + cy = 0?$$
   (b) Utilice el inciso anterior para resolver la ecuación diferencial
$$y'' = \lambda y,$$
   donde λ es una constante dada.

2. (Rep1PI2017) Determine **una** ecuación diferencial lineal, de menor orden posible, tal que cada una de las siguientes funciones sea una solución particular:
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ x,\ -x,\ xe^x,\ xe^x \cos x.$$

3. (1PII2016) Deterrmine, sin derivar, si la función $y = x \sin x + x \cos x$ es solución de la EDLCC
$$y^{(9)} - 2y^{(8)} + 3y^{(7)} - 4y^{(6)} + 3y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0.$$
   Puede ayudar el hecho que las funciones $y = e^x$ y $y = xe^x$ son soluciones

4. ¿Es la función $y = x^2 \sin x$ solución de la EDLCC
$$(D^8 - 7D^7 + 4D^6 - 21D^5 + 6D^4 - 21D^3 + 4D^2 - 7D + 1)y = 0?$$

5. (2PII2014) ¿Para cuáles valores de n se tiene que la solución general de la siguiente ecuación lineal con coeficientes constantes
$$y''' - 2y'' + n^2 y' - 2n^2 y = 0$$
   no contiene soluciones trigonométricas? ¿Cuál sería dicha solución general?

6. (1PI2014) Determine una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes y de orden cinco que tenga por solución a la siguiente familia de curvas
$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-x} + e^x(c_4 \cos(2x) + c_5 \sin(2x)) + e^{2x} - 2\sin(x),$$
   donde c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 son constantes arbitrarias.

7. (1PII2011) ¿Cuál es el menor valor de n y el valor de a_n para que exista una EDLCC
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$
   que tenga entre sus soluciones a las funciones x^2, e^{7x}, xe^{-5x}?

8. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.
   (b) $y^{iv} + 2y'' + y = 0$.
   (c) $y^{iv} - y = 0$
   (d) $y^{iv} - 3y''' - 2y'' + 2y' + 12y = 0$.
   (e) $y^{iv} - 2y''' + 12y'' + 2y' - 13y = 0$.
   (f) $y''' - 3y' - 2y = 0$.

9. En cada caso, halle una EDLHCC (si existe) tal que las funciones dadas constituyen un conjunto fundamental de soluciones para dicha ecuación:

   (a) $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = x^3$.
   (b) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$.
   (c) $y_1 = e^{2x}\sin(3x), y_2 = e^{2x}\cos(3x), y_3 = 1, y_4 = x$.
   (d) $y_1 = x, y_2 = x\ln x$.
   (e) $y_1 = x, y_2 = \sqrt{x}$.
   (f) $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, y_3 = x\sin x, y_4 = x\cos x$.
   (g) $y_1 = \cos x, y_2 = x\cos x, y_3 = x^2\cos x$.
   (h) $y_1 = \cosh x, y_2 = \sinh x$.

10. Cuál es la EDLHCC de menor orden posible que tiene a $y = e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ como solución particular?

Coeficientes Indeterminados / Anuladores

1. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y'' + 6y' + 13y = x\cos x$.
   (b) $x'' + x' = 4te^t$.
   (c) $y'' + y = \cos^2(2x) + \sin^2(x/2)$
   (d) $y^{iv} - 3y''' + 3y' - y = 2e^x$.
   (e) $y'' - 3y' + 2y = 4\sin^3(3x)$. *Sugerencia:* Note que $2\sin^2(3x) = 1 - \cos(6x)$.

2. Halle la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 3y' + 2y = 2\ln x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

3. (1PII2015) Resuelva el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y^{(4)} + y'' = 4030(e^x + x), \\ y'''(0) = 2015,\ y''(0) = 6045,\ y'(0) = y(0) = 2015. \end{cases}$$

4. (Rep1PII2015) Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = \cos x + (x+1)e^x.$$

5. (Rep1PI2013) Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 2y'' + 2y' - 2y = (e^{t/2} + e^{-t/2})^2.$$

   Sugerencia: le puede ser útil saber que la función $y(t) = t\cos t$ es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

6. (1PII2013) Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y' + e^{-2x}y = 0,$$

   realizando el cambio de variable $z = e^{-x}$.

7. (1PII2012) Resuelva la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 2y'' + y = \cos(x).$$

8. (1PI2012) Halle la EDLCCnH cuya solución general sea

$$y(x) = c_1e^{-x}\cos(2x) + c_2e^{-x}\sin(2x) + x^2.$$

9. ¿Existe alguna EDLCC cuya solución general sea

$$y(x) = c_1e^{-x}\cos(2x) + c_2e^{3x} + x^2?$$

Variación de Parámetros

Suponga que la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

está dada por

$$y_H(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x).$$

Entonces, una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

esá dada por

$$y_p = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x) + \cdots + \gamma_n(x)y_n(x),$$

donde las *funciones* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x)/a_n(x) \end{pmatrix}.$$

Es decir (usando la regla de Cramer),

$$\gamma_i = \int \frac{W_i}{W}\, dx,$$

donde $W = W(y_1, \cdots, y_n)$ es el Wronskiano asociado a y_H.

1. (1PII2016) Utilice variación de parámetros para hallar la solución general de la ecuación:
$$y'' - (2 - \tan(x))y' + (1 - \tan(x))y = e^x \cos(x),$$
si se sabe que $y(x) = e^x$ es solución de la homogénea.

2. (1PI2012) Halle la solución general de la ecuación diferencial
$$(1 + x^2)y'' + p(x)y' + q(x)y = e^x(x^3 - x^2 + x - 1),$$
sabiendo que $y_1 = x$ y $y_2 = e^x$ son soluciones (particulares) de la ecuación diferencial homogenera asociada.

3. Considere la ecuación diferencial
$$y'' + y' + e^{-2x}y = F(x).$$
Si se sabe que la función $y(x) = \cos(e^{-x})$ es solución de la ecuación homogénea asociada, halle la solución general cuando

(a) (1P?????) $F(x) = e^{-2x}$.

(b) (1PII2013) $F(x) = e^{-3x}$.

(c) (1PI2011) $F(x) = xe^{2x} - 1$.

Sugerencia: Solo uno de los ítemes anteriores requiere el uso del método de variación de parámetros!!

Reducción de orden

Si $y_1(x) \neq 0$ es una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

el cambio de variable $y = vy_1$, transforma la ecuación diferencial anterior en una de grado $n-1$ (en v'). En particular, si $n = 2$, obtenemos la ecuación diferencial lineal de variable ausente:

$$u'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a_1}{a_2}\right)u' = 0,$$

de donde obtenemos la *fórmula de Abel*:

$$u = \int \frac{e^{-\int a_1/a_2}}{y_1^2}\,dx.$$

1. (Rep1PI2017) Halle una ecuación diferencial lineal homogénea (necesariamente de coeficientes variables) que tenga
$$y = Ae^x + Bx^4e^x$$
como su solución general.

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:
   (a) $(x+1)^2y''' - 2y' = 0$.
   (b) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1+x)y' - 2y = 0$
   (c) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = x$.
   (d) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2e^x$.

3. (1PII2015) Considere la ecuación diferencial
$$4x^4y'' + 8x^3y' + y = F(x).$$
   (a) Sabiendo que $y_1(x) = \sin\left(\frac{1}{2x}\right)$ es una solución de la ecuación homogénea asociada, halle la solución general de la ecuación homogénea asociada.
   (b) Halle la solución general de la ecuación dada cuando $F(x) = -1$.

4. (2PII2014) Sabiendo que la función $y(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ es solución de la ecuación homogénea asociada a

$$x^5 y'' + 2x^4 y' + xy = -1, \tag{4}$$

encuentre la solución general de la ecuación (4).

5. (1PII2013) Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0,$$

sabiendo que $y_1 = e^x$ es una solución.

6. Halle una EDLH de orden 2 que tenga por solución general la función:

   (a) $y_G = Ae^x + Bx^n e^x$ (para cualquier $n \geq 1$).

   (b) $y_G = A \sin x + Bx \sin x$.

7. (Rep1PI2017) Considere la ecuación diferencial lineal homogénea de orden 3

$$xy''' - y'' + (2-3x)y' + (2x-1)y = 0. \tag{5}$$

   (a) Verifique que $y_1 = e^x$ es solución de (5).

   (b) Muestre que la sustitución $y = u \cdot y_1$, transforma la ecuación diferencial (5) en una ecuación diferencial lineal de orden 1 en u'' (es de variables separables).

   (c) Use lo anterior para hallar la solución general de (5).

8. Sea $\lambda \neq 0$, y considere la ecuación diferencial

$$ty'' + (\lambda t + 3)y' + 2\lambda y = 0.$$

Muestre que el cambio de variable $u = x^2 y$ transforma la ecuación diferencial en una de variable ausente, y use este resultado para hallar la solución general:

$$y(x) = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2 e^{-\lambda x}(\lambda x + 1)}{x^2}.$$

Ecuación Diferencial de Cauchy-Euler

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler:

   (a) $x^2 y'' + xy' + 4y = x \ln x$.

   (b) $x^2 y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$.

   (c) $x^3 y''' - 2xy' + 4y = x^2$.

   (d) $x^4 y^{iv} - 64y = 0$.

2. (Rep1PI2017) Halle la solución general de la ecuación diferencial no homogénea de Cauchy-Euler
$$36x^3y''' + 72x^2y'' + 11xy' - y = 108x^4\ln(\sqrt{x}).$$

3. (1PI2014) Para $t > 0$, halle la solución general de la ecuación diferencial
$$x'' + \frac{1}{4t^2}x = \sqrt{t}.$$

4. (1PII2013) Resuelva la ecuación diferencial
$$2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x.$$

5. Determine una ecuación diferencial lineal homogénea tal que las funciones
$$y_1 = x, \quad y_2 = x\ln x, \quad y_3 = x^2$$
constituye un conjunto fundamental de soluciones.

6. Sean a, b constanstes y considere la ecuación diferencial de Euler
$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$
Muestre que la solución general es de la forma $y_G = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$ para algunos $r_1 \neq r_2$ **reales**, si y solamente si
$$b < \left(\frac{a-1}{2}\right)^2.$$

7. Considere la ecuación diferencial
$$6x^2y'' - (12x - 1)xy' + (6x^2 - x + 1)y = 0$$
Note que la podemos escribir como
$$6x^2(y'' - 2y' + y) + x(y' - y) + y = 0,$$
y utilice esto para hallar su solución general.