Los “Elementos” de Euclides

por

Juan Navarro Loidi (Instituto de Bachillerato a Distancia de Guipúzcoa), *jnavarrolo@euskalnet.net*

El tratado de geometría titulado los *Elementos* se cree que fue escrito alrededor del año 300 a. de C, por un griego llamado Euclides que enseñaba matemáticas en Alejandría (actualmente Egipto). Pese a su antigüedad, su interés no es sólo histórico. Hoy en día todavía se nota su influencia en los manuales de matemáticas. Además, sigue siendo una referencia obligada cuando se discute sobre el origen de determinados conceptos en geometría o en teoría de números, o cuando se escribe sobre axiomatización o lógica matemática.

El título “Elementos” resume bien el contenido de la obra. La palabra “Elemento” ($\sigma\tau o\iota\xi\varepsilon\iota\alpha$) tenía dos significados en Grecia, como explicaba Proclo de Licia (siglo V):

“El Elemento se compone de dos modos, como dice Menecmo, porque lo que construye es el elemento de lo construido [...]. /
También se dice, además, que elemento es lo más sencillo en que se resuelve lo complejo, siendo elementos las cosas más primitivas que se establecen para un resultado” [Fuente[1]: Vera, 1970, v. II p.1159/1160].

[1]Las referencias completas de los libros citados se encuentran al final en la bibliografía.

Estos dos sentidos que daba Proclo a la palabra “elemento” vienen a coincidir con las dos acepciones que tiene ese término actualmente en castellano. Los elementos son los conocimientos básicos que sirven para construir una teoría científica. Son por lo tanto los fundamentos de una rama del saber humano. Pero, al mismo tiempo, en español, una cuestión elemental es una información sencilla que se supone conocida por todo el mundo.

En estas líneas se va a describir el contenido de los *Elementos* y se va a comentar la forma en la que se introducen las distintas materias. Se mencionarán también algunas polémicas que ha habido sobre la corrección de los planteamientos de Euclides; pero no se va a profundizar en ellas. Nadie les puede negar su interés, pero entrar en esas discusiones nos alejaría del objeto de este escrito, que es sencillamente exponer lo que escribió Euclides hace veintitrés siglos.

4.1 Organización y metodología de los “Elementos”

El texto de los *Elementos*, en las versiones que se ajustan mejor al texto original, tiene las siguientes partes:

Libro	Definiciones	Proposiciones	Porismas	Lemas	Postulados	Nociones comunes
I	23	48	0	0	5	5
II	2	14	0	0	0	0
III	11	37	1	0	0	0
IV	7	16	1	0	0	0
V	18	25	2	0	0	0
VI	3	33	3	0	0	0
VII	22	39	1	0	0	0
VIII	0	27	1	0	0	0
IX	0	36	1	0	0	0
X	16	115	4	11	0	0
XI	28	39	1	1	0	0
XII	0	18	2	2	0	0
XIII	0	18	2	3	0	0
Total	130	465	19	17	5	5

Es decir, se divide en trece capítulos, llamados "libros", que se diferencian entre sí por su contenido. Los seis primeros estudian la geometría del plano. Los tres siguientes tratan de la teoría de números. El libro décimo es sobre los inconmensurables, o irracionales y los tres últimos son sobre la geometría del espacio.

Cada libro está dividido en apartados que pueden ser de seis tipos diferentes: definiciones, proposiciones, porismas, lemas, postulados y nociones comunes. Antes de comenzar a detallar el contenido de esos trece libros conviene precisar lo que significan esos términos.

Definiciones

Una definición es una frase que sirve para introducir un concepto matemático. En ella, normalmente, se define la nueva noción relacionando unos términos más generales ya definidos. Por ejemplo, en el libro primero se puede leer:

"20. De las figuras triláteras, el triángulo equilátero es el que tiene los tres lados iguales; el isósceles el que tiene dos lados iguales y uno desigual; y el escaleno, el que tiene los tres lados desiguales[2]".

En esta definición se parte de la idea de triángulo (definición 19 del libro primero) y de la noción de segmentos iguales para obtener, uniéndolas, los conceptos de triángulo equilátero, isósceles y escaleno. Esta manera de introducir los nuevos términos se suele relacionar con las doctrinas de Aristóteles. Pero los objetos matemáticos no siempre son tan fáciles de introducir. Las primeras definiciones, en particular, no se pueden presentar de esa forma. Por ejemplo:

"**1**. Un *punto* es lo que no tiene partes" o "**4**. Una *recta* es una línea que yace por igual respecto de todos sus puntos." [Puertas, 1991, v. I, p. 192]

¿Por qué "punto" es lo que no tiene partes y no el corte de dos líneas o la extremidad de una línea? Probablemente porque Euclides no quiso usar la línea, concepto más complejo, para definir el punto, que es más sencillo, según recomendaba Aristóteles. Pero, ¿por qué la recta es la línea "que yace por igual" y no es la línea "más corta de todas las que tiene los mismos extremos" como definía Arquímedes? Parece difícil encontrar la razón por la que Euclides prefirió elegir como fundamento para la definición de la línea recta la idea de dirección constante, en lugar de la de distancia mínima.

[2] Los textos de los *Elementos* que se citan pueden proceder de varias versiones castellanas, pero cuando se ha simplificado la redacción, como en este caso, no se indica ninguna fuente.

En los *Elementos* las definiciones son siempre unas frases breves y precisas. Este tratado no tiene explicaciones, ni ejemplos. Además, la definición de un objeto matemático no implica su existencia. Por ejemplo, en la definición 20 del libro I se introducen los triángulos equiláteros, pero sólo se utilizan después de haber demostrado que se pueden construir en la proposición 1 de dicho libro.

Se incluyen definiciones en muchos libros. En el libro I se introduce la mayoría de los términos que se utilizan en la geometría plana, aunque también se insertan varios más en los cinco libros posteriores. En el libro VII están todas las definiciones correspondientes a la aritmética, en el X las de los irracionales y en el XI las de la geometría del espacio. Las definiciones suelen estar colocadas al comienzo del libro, excepto en el décimo, que las tiene en tres lugares distintos.

Postulados y Nociones Comunes

Los postulados y los axiomas o nociones comunes son dos series de propiedades de los objetos matemáticos que se acepta sin discusión. No se diferencian mucho entre sí y en el texto no se explica por qué una afirmación se considera axioma y no postulado, lo que tampoco debe extrañar porque, como se ha dicho, Euclides enuncia y justifica, pero no explica nada.

Las nociones comunes, o axiomas, son afirmaciones generales, válidas en todas las ciencias, cuya evidencia las hace generalmente aceptables. Las que incluye Euclides en esta obra son en concreto:

1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.

2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales.

3. Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.

4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

5. El todo es mayor que su parte.

Los postulados como las nociones comunes se admiten sin demostración. Pero no son tan evidentes, por eso se postulan, es decir se pide que se acepten. Son propiedades específicas de la geometría. Los postulados que se incluyen en los *Elementos* son:

1. Postúlese que se pueda trazar una única recta entre dos puntos distintos cualesquiera.

2. Y que un segmento rectilíneo pueda ser siempre prolongado.

3. Y que haya una única circunferencia con un centro y un radio dados.

4. Y que todos los ángulos rectos sean iguales.

5. Y que si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos rectas, prolongadas indefinidamente, se corten en el lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

Basta con leer los postulados para comprobar que el postulado quinto, o de las paralelas, tiene una redacción diferente a la de los demás. Ese enunciado tan largo más parece el de un teorema que el de un postulado. Pero la discusión sobre la forma en que Euclides plantea el paralelismo en los *Elementos* se va a comentar más tarde, al presentar el contenido del libro primero.

Proposiciones

Las proposiciones son las aserciones que se logran demostrar partiendo de las proposiciones anteriores, las reglas aceptadas en axiomas y postulados y las propiedades que se suponen en las definiciones. Pueden ser de dos tipos: teoremas y problemas. Las que indican propiedades de los entes matemáticos se suelen llamar teoremas. Las que explican como se construyen esos objetos se llaman problemas. En muchas versiones de *Los Elementos* se diferencian claramente los dos tipos de proposiciones; pero se cree que Euclides no lo hacía. La única diferencia que tienen los teoremas y los problemas en las versiones más antiguas consiste en que los teoremas acaban con la frase "como queríamos demostrar" y los problemas con "como queríamos hacer".

De las 465 proposiciones que hay en los *Elementos* sólo 93 son problemas, que se reparten más o menos por igual en los trece libros. Las excepciones son el libro IV, que sólo tiene problemas, y los libros V y IX, que sólo tienen teoremas.

Partes de las proposiciones

Las proposiciones suelen tener las siguientes partes:

Enunciado: frase en la que se declara lo que se quiere demostrar o lo que se quiere construir.

Exposición: apartado en el que se concretan los datos del enunciado en un dibujo o se exponen los objetos que van a intervenir en los pasos posteriores.

Especificación: frase en la que se concretan las condiciones que deben cumplir los datos del enunciado.

Construcción: parte en la que se completa el dibujo añadiéndole las líneas o circunferencias que se necesiten para poder demostrar la afirmación del enunciado.

Prueba: apartado dedicado a justificar los pasos lógicos necesarios para deducir la tesis buscada o para construir la figura deseada a partir de los resultados anteriores.

Conclusión: último párrafo de la proposición. En él se repite la parte del enunciado que indica lo que se quería lograr y se termina diciendo "Como queríamos demostrar", o "c.q.d.", en los teoremas y "Como queríamos hacer", o "c.q.h.", en los problemas, o se acaba con otra frase equivalente. A veces se ponen las siglas en latín, "q.e.f." (quod erat faciendum), o "q.e.d.".

Tanto en la construcción como en la demostración, el autor justifica los pasos que da, indicando entre paréntesis la propiedad que utiliza.

La "especificación" no es frecuente. Sólo aparece en las proposiciones en las que se necesita exigir alguna condición a los datos. Por ejemplo, en la proposición 22 del libro primero se dice:

"22. Construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas. Pero es necesario que dos de las rectas tomadas juntas de cualquier manera sean mayores que la restante" [Puertas, 1991, v. I, p. 227].

A partir de "Pero..." se indica en el enunciado la condición que deben cumplir los segmentos, que en este caso es la conocida desigualdad triangular entre los lados. Posteriormente, en la exposición, se vuelve a repetir esta especificación y en la construcción se toman segmentos que la cumplen.

Las proposiciones ocupan la mayor parte de la obra. En ellas es sorprendente el cuidado que pone Euclides en justificar los pasos que da, tratando que el razonamiento sea inatacable. No suele mencionar exhaustivamente todas las propiedades utilizadas. Por ejemplo, las nociones comunes o los postulados no suelen figurar explícitamente como justificaciones, a partir del primer libro, porque se suponen conocidas. Pese a ello, considerando solamente las referencias que aparecen mencionadas se constata fácilmente que esta obra es una verdadera red en la que resulta difícil quitar o añadir algo sin cambiar todo el libro.

Por ejemplo, si se considera el teorema de Pitágoras (proposición 47 del libro primero, es decir I. 47), se observa que para justificar su demostración se citan, al menos, la noción común 2 (NC 2) y las proposiciones 4, 14, 41 y 46 (I.4, I.14, I.41 y I. 46). Pero para justificar esas proposiciones se citan otras. Por ejemplo en la I.46 se mencionan las I. 34, I. 31 y I. 29: En estas, a su vez, aparecen otras. Por ejemplo en la I.29 se utilizan como pruebas las NC1 y 2, el postulado 5 (P 5) y las proposiciones I.13 y I. 15. Este proceso se puede seguir hasta encontrar todas las justificaciones que se precisan utilizar, directa o indirectamente, en la demostración. En este caso, para justificar el teorema de Pitágoras se necesitan las cinco nociones comunes, los cinco postulados y las proposiciones número 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 26, 27, 29, 31, 34, 35, 37, 41 y 46 del libro primero. Por otra parte, observando donde aparece citado la I.47 se puede asegurar que si este teorema desapareciera faltaría una justificación en las proposiciones I.48; II.9, II. 10, II. 11, II. 12, II 13, y II.14; III 14 III 35 y III 36; IV 12; X.13 (lema), X 33, X 34 y X 35; XI 23 y XI 35; XII 17, XIII 14, XIII 15 y XIII 17, por lo que estas proposiciones no serían válidas, lo que invalidaría a su vez otras proposiciones que están basadas en ellas.

Porismas o Corolarios

En *Los Elementos* un porisma es una conclusión interesante que se deduce de una proposición demostrada, pero que no es necesaria para el desarrollo posterior del libro. En algunas versiones se les llama corolarios. Por ejemplo, en la proposición 15 del libro primero se dice:

"15. Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí [...] **Porisma**: Si dos rectas se cortan los ángulos de la intersección suman cuatro rectos."

Hoy en día se cree que este corolario no lo escribió Euclides sino que fue añadido después, aunque Proclo en el siglo V lo admitía como original. No es extraño que haya sido incorporado posteriormente porque el número de porismas aumentó mucho con el paso del tiempo. No era raro que los traductores o copistas introdujeran nuevos corolarios que consideraban interesante para sus lectores en las reproducciones que realizaban.

Lemas

Los lemas son teoremas que se suponen ciertos al demostrar una proposición, pero que una vez probada ésta se deben demostrar a su vez. Es decir, son afirmaciones que si se justificaran por completo cuando se emplean en una demostración harían perder al lector el hilo del razonamiento general. Por eso se declaran como algo sabido en la proposición en la que se utiliza, pero luego se enuncian como lemas y se demuestran.

Los lemas sólo aparecen en los últimos libros, que son los que tienen las demostraciones más largas.

4.2 Contenido de los Elementos

En cada libro de los *Elementos* se trata una materia diferente, por lo que estudiándolos sucesivamente se puede conocer de una forma ordenada el contenido de esta obra.

Libro I

Al comienzo del libro I se encuentran las definiciones de los conceptos básicos de la geometría plana y, a continuación, se enumeran todos los postulados y axiomas. Por eso en este principio se exponen los fundamentos de la geometría según Euclides. Las definiciones son en total 23. Las nueve primeras dicen:

"1. Un punto es lo que no tiene partes.

2. Una línea es una longitud sin anchura.

3. Las extremidades de una línea son puntos.

4. Una recta es una línea que yace por igual respecto de todos sus puntos.

5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.

6. Las extremidades de una superficie son líneas.

7. Una superficie plana es una superficie que yace por igual sobre todas las líneas que contiene.

8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran en un plano y no forma línea recta.

9. Y cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo es rectilíneo" [Puertas, 1991, v. I, p. 192].

En las siguientes definiciones se introduce el concepto de perpendicularidad, y se explica lo que son los ángulos obtusos y agudos. Se prosigue con el círculo y el diámetro para continuar con los polígonos. Se definen los triángulos equilátero, isósceles y escalenos y también los triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos. Se dice lo que es un cuadrilátero y se explica en qué se diferencian los cuadrados, rectángulos, rombos, y romboides. La última definición es la de rectas paralelas:

"23. *Rectas paralelas* son aquellas que, estando en un mismo plano, por más que se las prolongue en ambos sentidos nunca se encuentran".

Aunque el tratamiento del paralelismo en los *Elementos* ha sido uno de los puntos más debatidos de esta obra, esta definición no ha sido muy criticada. Sin embargo, no es raro que en algunas versiones de los *Elementos* se prefiera decir que las líneas paralelas, son las rectas que distan igualmente entre sí en todos sus puntos.

La crítica moderna considera que las definiciones son la parte más débil de la teoría euclídea. Se afirma, con razón, que se basan en ideas intuitivas y que en ellas se suponen propiedades que no se postulan ni se demuestran.

A las definiciones les siguen los postulados y los axiomas, que ya se han enumerado con anterioridad. Los tres primeros postulados piden que se acepte la existencia de rectas y círculos, y que se admita que esas figuras no están acotadas. El cuarto afirma que los ángulos rectos valen lo mismo en todos los puntos, es decir que el valor de un ángulo no depende de su localización. El 5^{o} postulado se va a comentar más adelante. Los axiomas indican varias propiedades de la igualdad. El más discutido es el cuarto que dice que dos cosas que coinciden son iguales. Este axioma viene a definir la congruencia geométrica como un tipo de igualdad. La idea es bastante evidente, pero su formulación rigurosa no es sencilla. ¿Cómo se debe hacer para que dos figuras coincidan? Normalmente se coloca una encima de la otra; pero para eso hay que mover, al menos, una de ellas. Y ¿cómo se mueven las cosas en geometría?. Los griegos consideraban que el movimiento no era un buen método para desarrollar las matemáticas. Euclides trata de evitarlo siempre que puede, pero necesita esta noción común, al menos, para demostrar la proposición I. 4, que es uno de los casos de igualdad de triángulos.

Para los matemáticos que han comentado los *Elementos* la frontera entre postulado y axioma no está muy clara. En muchas versiones hay axiomas originales que aparecen como postulados o viceversa. En general los estudiosos consideran correcto introducir estos principios, pero frecuentemente han pedido que se amplíe su número por razones lógicas y pedagógicas. Algunos ejemplos de axiomas que se han propuesto son:

Siendo dado un grandor o cantidad: que se pueda tomar otra mayor o menor.

Si iguales se añaden a desiguales dan desiguales.

Si iguales se substraen de desiguales dan desiguales.

Los dobles y las mitades de la misma cosa son iguales.

También se han propuesto postulados como:

Dos líneas rectas no cierran superficie.

Postular la existencia de puntos.

Algún postulado de continuidad que asegure que las rectas o circunferencias que se cortan tienen un punto común.

Postular un orden dentro de la recta.

Postular la existencia de la cuarta proporcional (para el libro V).

Dos rectas no pueden limitar una superficie.

Dos rectas no pueden tener un segmento en común y no coincidir.

Esas críticas a las definiciones y a los axiomas y postulados llevaron a varios autores a proponer otras formas alternativas de introducir la geometría. Hasta el siglo XIX los planteamientos que se hacían no se alejaban muchos de lo que había propuesto veinte siglos antes Euclides. En ese siglo comenzó a vislumbrarse una nueva base axiomática de la geometría, más acorde con las exigencias del rigor matemático. El sistema más difundido y aceptado fue el que propuso Hilbert en su obra *Grundlagen der Geometrie* (1899). La teoría hilbertiana fue un avance importante en la búsqueda de unos fundamentos rigurosos de la geometría. Pero, como ahora se sabe, por ese camino no se pueden superar los límites impuestos por el teorema de Gödel.

Pese a esas críticas a la axiomática los *Elementos*, no deja de ser admirable que 2200 años antes de que Hilbert publicara su propuesta, Euclides planteara una axiomatización tan completa de la geometría. Además, aunque no tengan suficiente rigor y profundidad, esta propuesta de los *Elementos* permite desarrollar una geometría intuitiva, más fácil de “ver” que la de Hilbert. Por eso sus enseñanzas no han desaparecido del todo. Una buena parte de lo que expone Euclides en su obra se sigue explicando en los manuales de geometría que se utilizan en la enseñanza básica.

Las proposiciones

En la primera proposición se indica cómo se puede construir un triángulo equilátero. Con este problema se demuestra que los triángulos equiláteros existen, pero, sobre todo, se halla una construcción necesaria para probar la proposición segunda, que muestra como se trasladan los segmentos. Para añadir, quitar o comparar segmentos se necesita colocarlos juntos, por lo que esta segunda proposición resulta fundamental para el desarrollo posterior del libro.

En estas dos proposiciones se suele criticar que en la construcción se suponga que existen puntos de corte entre rectas y circunferencias, sin haber postulado la continuidad de la recta. Esa crítica es válida, pero lo que más sorprendente es que Euclides considere necesario explicar cómo se mueve un segmento. Podría haber postulado que los movimientos isométricos existen, o considerar que los desplazamientos se pueden deducir de la noción común 4. Pero prefiere demostrar que las isometrías se pueden deducir de su teoría sin nuevas hipótesis.

En la proposición siguiente se explica cómo se quita un segmento de otro y en las 4, 7, 8 y 26 se estudian los diversos casos de igualdad de triángulos.

La proposición 5 es la primera que tiene una demostración larga y era conocida en las universidades de la Edad Media por el "Pons asinorum", o el puente de los asnos. El nombre le viene de la forma de su dibujo y de que a los malos alumnos les costaba pasar de esta proposición, como a los asnos les cuesta cruzar un puente. En esa proposición y en la siguiente se demuestra que en un triángulo a lados iguales les corresponden ángulos iguales, y viceversa. Algo más adelante se prueba que a mayor ángulo le corresponde mayor lado. En la proposición 15 se demuestra la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice y, en las posteriores, hasta la 22, diversas propiedades de los ángulos y los lados de un triángulo. En la 23 se explica como se pueden trasladar los ángulos. También hay varias proposiciones dedicadas a mostrar como se traza la bisectriz de un ángulo, la I.9, la mediatriz de un segmento, la I.10, o una perpendicular a una recta, las I.11 y I. 12.

Las proposiciones que van de la 27 a 33, junto con la 17, el quinto postulado y la definición de dos rectas paralelas, completan el núcleo de la teoría de las paralelas en *Los Elementos*. Desde la Antigüedad hasta los trabajos de Gauss, Boylai y Lobachewski, muchos opinaban que el quinto postulado se podía demostrar y que no era correcto plantearlo como una petición. Esa idea se apoyaba en la redacción del postulado de las paralelas y en que Euclides no emplea ese postulado hasta la proposición 29, que es la recíproca de la 27:

"27. Si un segmento corta a dos rectas haciendo los ángulos alternos iguales entonces las rectas son paralelas.

29. Una recta que corta a dos rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales, los ángulos exteriores iguales a los interiores y opuestos, y la suma de los ángulos interiores por el mismo lado iguales a dos rectos."

Es normal que al analizar este libro se piense que la proposición 29 debe poderse demostrar sin utilizar el quinto postulado, pues Euclides demuestra su recíproca, la I.27, sin mencionarlo. Si eso pudiera hacerse el 5º postulado sería un corolario inmediato de la proposición I. 29. Muchos matemáticos propusieron demostraciones a este postulado de las paralelas, algunas nada malas. Ahora se sabe que eso no es posible y que se pueden aceptar otros postulados en lugar de este para desarrollar otras geometrías no euclídeas. Antes eso no se sabía, pero también se hicieron críticas acertadas a esas "demostraciones" del 5º postulado. En general, se mostró que detrás de las mejores pruebas se escondía la aceptación de alguna otra forma de esa propiedad. Algunos ejemplos de esos postulados alternativos que se propusieron son:

La distancia entre dos rectas paralelas ni se expande ni se contrae.

Una línea equidistante de una línea recta es una recta.

En un cuadrilátero si tres de sus ángulos son rectos lo es también el cuarto.

Todos los ángulos de un cuadrilátero equilátero y equiángulo son rectos.

Por un punto que no esté en una recta pasa una paralela a ella.

Por tres puntos no colineales pasa una única circunferencia.

La suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos.

Este tema es muy interesante, pero supera ampliamente lo que se puede incluir en una introducción a los *Elementos* como esta[3].

Para algunos autores toda esa discusión se produjo porque Euclides no utilizó el quinto postulado en la demostración de la proposición I. 17 como debería haber hecho:

---

[3]Quien esté interesado en las hipótesis que hicieron y en las discusiones que tuvieron lugar pueden consultar R. Bonola, *La Geometria Non-Euclidea* [1906, Bologna]. Existe una traducción española.

“17. En cualquier triángulo, la suma de cualesquiera dos ángulos es menor que dos rectos”.

Dado que este teorema no se cumple en general para los triángulos esféricos probablemente sea cierto. Pero como en otros casos lo más sorprendente no es que Euclides hace 2300 años cometiera ese fallo, sino que tuviera el acierto de incluir el 5º postulado entre las peticiones. Las proposiciones siguientes tratan del área de los paralelogramos y de los triángulos. En ellas se discute cuando tienen dos paralelogramos igual área y se demuestra que la diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales. A continuación se estudian varios casos de igualdad entre las áreas de dos triángulos. La proposición 41 dice que el área del triángulo es la mitad de la del paralelogramo que tiene la misma base y altura. Las proposiciones $44, 45$ y 46 tratan de la forma de dibujar rectángulos o cuadrados que tengan un área dada y cumplan alguna otra condición, por ejemplo que dos lados formen un ángulo conocido.

Las dos proposiciones que quedan, I.47 y I.48, son el llamado teorema de Pitágoras y su recíproco.

Libro Segundo

El libro segundo comienza con las definiciones de rectángulo y de “gnomon”, que es una especie de L obtenida al quitarle a un rectángulo otro semejante más pequeño en un vértice. Las once proposiciones iniciales tratan de relacionar el área de unos cuadrados o rectángulos que tienen por lados unos segmentos dados con la superficie de otros cuadriláteros que tienen por lados sumas o restas de dichos segmentos. Las proposiciones 12 y 13 equivalen a la propiedad de los lados de un triángulo que ahora se conoce por el “teorema del coseno”. En la proposición última se explica la manera de hallar un cuadrado cuya área sea igual a la de una figura rectilínea dada.

Las once primeras proposiciones de este libro se podrían considerar propiedades algebraicas, si en lugar de segmentos en él se hablara de cantidades. Con esa orientación las proposiciones de este libro se podrían indicar como:

II.1 $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

II.2 $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$

II.3 $(a + b)a = ab + a^2$

II.4 $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

II.5 $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

II.6 $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$

II.7 $(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2$

II.8 $4(a + b)a + b^2 = [(a + b) + a]^2$

II.9 $a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right]$

II.10 $(2a + b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a + b)^2]$

II.11 Problema $a(a - x) = x^2$

II.12 y 13 Teorema del coseno de trigonometría

II.14 Problema $x^2 = ab$

Pero Euclides presenta todas estas proposiciones como cuestiones geométricas. Por ejemplo, el enunciado de la proposición 9 es:

"9 Si se corta una línea recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de los segmentos desiguales de la (recta) entera son el doble del cuadrado de la mitad más el cuadrado de la (recta situada) entre los puntos de sección." [Puertas, 1991, v. 1, p. 279]

No sólo los enunciados, las demostraciones también son puramente geométricas.

Libro Tercero

En el libro tercero se estudia la circunferencia, junto con sus arcos cuerdas, tangentes, segmentos y sectores, y también los ángulos que se pueden definir sobre ella. Contiene once definiciones en las que se explica en que consisten esos objetos matemáticos. De esas definiciones la única extraña es la de ángulo de un segmento:

"7. Un ángulo de un segmento es el comprendido por una recta y una circunferencia de un círculo" [Puertas, 1991, v. I, p. 292]

Este ángulo tiene un lado recto y el otro curvo, es por lo tanto mixtilíneo.

En las cuatro primeras proposiciones se estudia como se halla el centro de una circunferencia, y se demuestra que todas las cuerdas son interiores a la circunferencia. También se prueba que un diámetro la corta en dos partes iguales y que los diámetros perpendiculares a una cuerda la bisecan.

Las proposiciones 5 y 6 afirman que los círculos secantes o tangentes no pueden ser concéntricos. A continuación se discute de la máxima y de la mínima distancia que puede haber entre un punto interior o exterior a una circunferencia y dicha circunferencia. Las proposiciones siguientes, hasta la 13 se refieren a propiedades de los círculos tangentes y secantes. Luego se hallan varias relaciones entre cuerdas de una misma circunferencia, para proseguir estudiando las tangentes. En la proposición 17, por ejemplo, se explica como se construye una tangente, demostrando con ello que esas rectas existen. Se examinan también los ángulos inscritos en un círculo. En las proposiciones 23, 24 y 25 se indican algunas relaciones entre cuerdas y arcos y se explica como se dibuja la circunferencia que tiene un arco dado. En las siguientes proposiciones se comparan las cuerdas y los segmentos de dos círculos diferentes. En la 30 se explica cómo hacer la bisección de un arco y en las últimas proposiciones se estudia la potencia de un punto respecto a una circunferencia.

Como Euclides acepta los ángulos mixtilíneos, se ve obligado a considerar ángulos que son más pequeños que cualquier ángulo agudo, sin ser cero, o mayores a cualquier ángulo agudo, sin llegar a ser rectos. Así en la proposición 16 se afirma:

"Si en la extremidad de un diámetro se levanta una perpendicular, tocará esta allí el círculo, quedando toda fuera de él; y entre ella, y la circunferencia otra cualquiera recta que se tirare, prolongada, entrará en el círculo; el ángulo de medio circulo, es mayor que cualquier ángulo rectilíneo, y el restante menos." Este "ángulo de un semicírculo" y el ángulo mixto entre la tangente y el arco, llamado "ángulo de contingencia" o "ángulo en cuerno", sólo los utiliza Euclides en esta proposición. Su empleo causó polémicas desde la antigüedad. Proclo los aceptaba como verdaderos ángulos, pero parece que no todo el mundo en Grecia lo hacía. Los matemáticos de la Antigüedad se dieron cuenta que es difícil considerar esos ángulos como magnitudes porque no se pueden ordenar, bisecar, o medir con facilidad. En el Renacimiento se enfrentaron dos posturas claras. Una, encabezada por Pelletier, decía que no eran ángulos. La otra, dirigida por el jesuita Clavius, pretendía que sí lo eran, aunque no lo fueran de la misma manera que los rectilíneos. Pelletier afirmaba que no se puede decir que una tangente tiene una inclinación con la curva que toca, porque para tener un ángulo debe haber un corte. Clavius decía que los ángulos de contacto se pueden dividir o superponer, aunque aceptaba que carecían de la propiedad arquimedeana. La discusión acabó a finales del siglo XVII cuando Wallis explicó que lo que variaba en los razonamientos de Clavius no era la magnitud del ángulo mixto sino la curvatura en el punto de contacto del lado curvilíneo.

Libro IV

Este libro comienza con siete definiciones sobre figuras inscritas y circunscritas en un círculo. Las proposiciones que tiene son dieciséis. En la primera se explica como inscribir un segmento en un círculo. Desde la segunda hasta la quinta se expone la manera de inscribir y circunscribir triángulos en círculos y viceversa. Desde la sexta hasta la novena se estudia lo mismo, pero con cuadrados. En la proposición décima se explica como se construye un triángulo isósceles inscrito en un círculo en el que los dos ángulos iguales valgan el doble del desigual. Este triángulo se necesita para inscribir y circunscribir pentágonos en círculos y viceversa, cuestión a la que se dedican las proposiciones 11, 12, 13 y 14. En la proposición 15 se trata de la forma de inscribir un hexágono en un círculo y en la última proposición se indica la forma de inscribir un pentadecágono regular en un círculo.

Este libro es más sencillo que los anteriores. En él Euclides describe como se pueden construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 15 lados. Aunque no lo mencione, a partir de esos polígonos son fáciles de dibujar los de 8, 10, 12, ó 16 lados, ya que bastaría con trazar las bisectrices de los ángulos centrales de las figuras halladas. Faltan los polígonos regulares de 7, 9, 11, 13, 17, 19 etc. lados y los que se obtendrían por bisección del ángulo central a partir de ellos. Euclides nada dice de esas figuras, pero ahora se sabe que esos polígonos no se pueden construir con regla y compás. Sólo hay una excepción que encontró Gauss en 1796. Este matemático demostró que únicamente se pueden construir con regla y compás los polígonos de un número n impar de lados cuando los factores primos de n son números primos de Fermat diferentes. Es decir primos de la forma[4] $F_k = 2^{2^k} + 1$. En consecuencia Euclides indica en este libro la forma de dibujar con regla y compás todos los polígonos regulares de 15 o menos lados para los que eso es posible. No explica la forma de trazar el polígono de 17 lados, $(2^4 + 1)$, que Gauss demostró que se podía dibujar también con regla y compás, pero no parece un fallo grave.

Libro V

En el libro V se introduce la proporcionalidad entre segmentos, cuestión necesaria para poder definir figuras semejantes. En los libros anteriores sólo se discute sobre figuras iguales mayores o menores. A partir de este libro se puede estudiar la semejanza.

Las definiciones son 18. De ellas las más interesantes son la cuarta y la quinta.

[4]Como el $3 = 2^1 + 1$, el $5 = 2^2 + 1$ o el $257 = 2^8 + 1$

En la cuarta se indican las condiciones que deben cumplirse para que se pueda definir una razón entre dos magnitudes:

"4. Se dice que guardan razón entre sí dos magnitudes que al multiplicarse, pueden exceder una a otra" [Puertas, 1994, v. II, p. 10].

Es decir, se pide que las magnitudes que se comparen sean del mismo tipo y se excluyen las cantidades infinitas o infinitesimales. Pero no se exige que tengan una unidad de medida común por lo que pueden ser magnitudes inconmensurables. O sea se aceptan las fracciones irracionales.

La definición más importante es la quinta, en la que se precisa la igualdad entre estas razones:

"5. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera/ y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente y tomados en el orden correspondiente" [Puertas, 1994, v. II, p. 11/12].

La mención a "cualesquiera equimúltiplos" hace que esta definición sea equivalente a las que determinan una fracción real como el límite de sucesiones convergentes de fracciones racionales. Pero el inconveniente de este enunciado es que resulta difícil de aplicar en la práctica. Por eso en muchas versiones antiguas de los *Elementos*, aunque incluyen esta definición, en las proposiciones del libro V se limitan a probar las propiedades enunciadas para fracciones racionales.

La definición de desigualdad entre razones tiene una redacción parecida a la de igualdad. También se define en este libro lo que es antecedente y consecuente y se dan distintos nombres a las igualdades entre razones que se obtienen a partir de una dada cambiando antecedentes, o consecuentes. Según la forma de hacerlo a esa operación se le llama alternancia, inversión, composición, separación, o conversión.

Las proposiciones del libro V son 24 y generalizan las propiedades de las fracciones numéricas, que se estudian en el libro VII, a cualquier tipo de razones. Las seis primeras tratan de razones en las que antecedente y consecuente tienen una unidad de medida común, por lo que las demostraciones son sencillas.

En las proposiciones siguientes, desde la séptima hasta la décima se estudia como varía la relación de igualdad y desigualdad entre dos razones cuando tienen los antecedentes o consecuentes iguales. En la verificación de estas proposiciones, que ya no se limitan al caso de magnitudes conmensurables, se necesita utilizar la definición quinta, por lo que sus demostraciones resultan más complicadas. Las proposiciones 11 y 13 demuestran la transitividad de la igualdad y de la desigualdad de razones. En las 12 y 15 se relacionan varias razones con la suma de sus antecedentes y de sus consecuentes o con sus múltiplos. En la proposición 14 se demuestra que si los consecuentes son iguales a mayor antecedente le corresponde mayor razón.

En las proposiciones que van desde la 16 hasta la 19 se demuestra que si dos razones son iguales las que se obtienen a partir de ellas "separando", "alternando", "invirtiendo" o "componiendo" también lo son. Las proposiciones de la 20 a la 23 tratan de la comparación de dos series de magnitudes.

Tanto en los enunciados como en las demostraciones se trabaja con magnitudes y equimúltiplos, nunca se mencionan números o fracciones. Los dibujos son siempre segmentos, aunque las propiedades sean válidas para todo tipo de magnitudes (segmentos, áreas o volúmenes).

Libro VI

En el libro VI se estudia la proporcionalidad entre segmentos y la semejanza entre figuras planas. Contiene tres definiciones en las que se expone lo que son figuras semejantes, lo que es la altura en una figura y lo que se entiende por dividir un segmento en media y extrema razón, es decir por división áurea.

Las primeras proposiciones tratan de la proporcionalidad en triángulos. La primera dice que dos triángulos que tienen la misma altura "son entre sí como sus bases", es decir que su área es proporcional a la longitud de la base. La segunda afirma que trazando una paralela a la base de un triángulo los segmentos que se determinan en los lados son proporcionales. Esta propiedad se suele dar ahora en la enseñanza elemental como consecuencia del "Teorema de Thales". En las proposiciones siguientes, desde la cuarta hasta la séptima se estudian los diversos casos de semejanza de triángulos. En la octava se demuestra que en un triángulo rectángulo se cumplen los teoremas de la altura y del cateto.

A continuación se trata de la división de una línea en partes proporcionales, explicándose como se obtiene la tercera proporcional de dos segmentos y la cuarta proporcional de tres segmentos. Finalmente, en la proposición 13 se indica la forma de encontrar la media proporcional de dos segmentos. A estas proposiciones se les puede encontrar una interpretación algebraica sencilla. Hallar el cuarto proporcional, por ejemplo, es hacer una regla de tres y la media proporcional es equivalente a calcular la raíz cuadrada, ya que si $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ se cumple que $x^2 = ab$ es decir que $x = \sqrt{a.b}$.

Pero en esta proposición, como en las demás, el procedimiento propuesto para hallar la media proporcional, utilizando una semicircunferencia auxiliar, es puramente geométrico.

La proposición 16 equivale a la conocida propiedad de las fracciones numéricas que dice que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se verifica que $a.d = b.c$. Pero de nuevo el planteamiento es geométrico. Su enunciado es:

"16 Si cuatro líneas son proporcionales, el rectángulo hecho de las extremas será igual al de las medianas; y si el de estas es igual al de las extremas, las cuatro líneas serán proporcionales."

Las proposiciones siguientes, desde la 18 hasta la 23 tratan de la construcción y las propiedades de las figuras semejantes. La 19 por ejemplo dice que:

"19 Los triángulos semejantes guardan entre sí la razón duplicada de sus lados correspondientes." [Puertas, 1994, v. II, p. 83].

En la proposición 25 se estudia la construcción de una figura igual en área a una dada y semejante en su forma a otra conocida.

En las proposiciones 27, 28 y 29 se mencionan propiedades de unos paralelogramos construidos sobre un segmento dado, a los que se les añade o se les quita otro paralelogramo semejante a uno conocido. Los enunciados resultan bastante enrevesados y su utilidad no es evidente. Pero si se plantean como problemas algebraicos, se observa que los segmentos pedidos en las proposiciones 28 y 29 son las soluciones de ecuaciones del tipo: $ax - bx^2 = c$ y $ax + bx^2 = c$.

Estas proposiciones junto con la VI.13, la II.14 y las I.43, I.44 y I.45 permiten resolver "geométricamente" las ecuaciones de 2º grado.

En la proposición 30 se explica como "dividir una recta finita dada en media y extrema razón", es decir cómo hallar la razón áurea.

La proposición 31 es una generalización del teorema de Pitágoras en la que se dibujan sobre los lados paralelogramos semejantes.

Libro VII

Los libros VII, VIII y IX de los *Elementos* están dedicados a la aritmética. En el primero de ellos se encuentran las 22 definiciones que Euclides propone en esta materia. En dichas definiciones se introducen los conceptos de unidad y número. Se explica cuando un número es parte (divisor) o partes (no divisor) de otro. Se definen los números pares e impares, junto con otros números, como los parmente par, imparmente par, o imparmente impar, que ahora están en desuso. También se informa de lo que son los números primos y compuestos. Se expone lo que es multiplicar un número por otro y, partiendo de la idea de producto, se definen los números planos, cuadrados, sólidos y cubos. Se terminan con la definición de número perfecto, que "es el que es igual a sus propias partes[5]".

Es interesante la diferencia que se observa entre la definición de unidad y número:

1. Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una.

2. Un numero es una pluralidad compuesta de unidades.

Esta diferenciación era habitual en la Grecia clásica. Para los pitagóricos la unidad era la frontera entre los números y las partes y para Aristóteles era una cantidad indivisible. En general para los griegos el uno era diferente a los demás números.

Euclides no incluyó postulados ni axiomas en este libro. Sin embargo, hubiera sido normal incluir algunas peticiones específicas de la aritmética, como por ejemplo:

La sucesión de números comienza en uno pero se puede aumentar indefinidamente.

Si A divide a B y B divide a C, A divide a C.

En cuanto a las proposiciones, desde la 1 hasta la 3 se explica la manera de hallar el máximo común divisor de dos o más números. El método que se propone en la proposición 2 es el que todavía se llama "de Euclides".

Las siguientes proposiciones hasta la 19 exponen propiedades de la proporcionalidad numérica y son bastante parecidas a las que se incluyen en el libro V para las razones de segmentos. Por ejemplo la 19 dice que

[5]Por ejemplo es perfecto el 6, al que dividen el 1, el 2 y el 3, además del mismo 6, y resulta que 1+2+3=6.

"19. Si cuatro números son proporcionales el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero; y si el producto del primero y el cuarto es igual al producto del segundo y el tercero, los cuatro números serán proporcionales."

En las proposiciones siguientes se estudian los números primos y compuestos. Esta serie de proposiciones acaban con la 32 que dice que "Todo número o es primo o es medido por algún número primo". En las últimas proposiciones se determina la forma de hallar el mínimo común múltiplo de varios números, terminando con:

"Proposición 39 Hallar un número que sea el menor que tenga unas partes dadas" [Puertas, 1994, v. II, p. 162].

Libro VIII

Este libro contiene 27 proposiciones que tratan mayoritariamente de números en "proporción continua", es decir de cantidades en progresión geométrica. En las primeras proposiciones se estudian las progresiones que tiene de término general un número de la forma $a^n b^m$ y cuya razón es igual a $\frac{a}{b}$. En las proposiciones 8, 9 y 10 se indica la forma de interpolar entre dos números dados varios medios en progresión geométrica. En la siguiente se demuestra que entre dos números cuadrados sólo se puede hallar un medio proporcional y que la razón entre cuadrados es duplicada a la que hay entre los lados. La proposición 12 es similar pero está referida a los cubos. A continuación, hasta la proposición 23, se indican propiedades de progresiones en las que los números son planos, cuadrados, sólidos o cubos. En las últimas proposiciones del libro se explica que cuando la razón entre dos números es igual a la razón entre dos cuadrados si uno es cuadrado el otro también debe serlo. Finalmente, se demuestra la misma propiedad con cubos y con números planos.

Libro IX

En este libro se comienza estudiando los números planos y sólidos, y las propiedades que tienen sus productos. Por ejemplo, la proposición 4 afirma que si un número cubo se multiplica por otro cubo el producto será también un cubo. A partir de la proposición octava se estudian progresiones geométricas que comienzan en la unidad, demostrándose en la decimocuarta que la descomposición de un número en factores primos es única:

"14. Si un número es el menor medido por números primos no será medido por ningún otro número primo fuera de los que le medían desde el principio."

En las proposiciones siguientes se discurre sobre cuando se puede encontrar el tercero o el cuarto proporcional entre unos números. La proposición 20 dice que “hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos”. La manera de probarlo que propone Euclides es la misma que aparece todavía en los libros de aritmética.

Desde la proposición 21 hasta la 34 se discute sobre la suma, resta, multiplicación o división de números pares o impares, sobre sus mitades y sus dobles. En la proposición 35 se indica la forma de hallar la suma de los términos de una progresión geométrica:

“35 Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales, y se quitan del segundo y del último números iguales al primero, entonces el exceso del segundo es al primero, así el exceso del último serán a todos los anteriores.”

Pese a que la forma de expresarlo no es la que actualmente se utiliza el resultado es el correcto. La proposición afirma que $\frac{a_2-a_1}{a_1} = \frac{a_n-a_1}{S_{n-1}}$, es decir que $S_{n-1} = \frac{a_n-a_1}{a_2-a_1}$, expresión que poniéndola en función de la razón es $S_{n-1} = \frac{a_1r^n-1}{r-1}$.

La proposición 36 es famosa porque en ella se explica como se pueden obtener los números perfectos:

“Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su suma total sea un número primo y este total se multiplica por el último el producto será un número perfecto.”

En todos estos libros aritméticos los números se representan como segmentos, aunque se discuta sobre números planos, cuadrados o cubos. En la redacción original no se incluían ejemplos con números, pero en muchas versiones se explican los resultados con unos valores numéricos. El método utilizado por Euclides en sus demostraciones sigue teniendo el rigor de la parte dedicada a la geometría plana. Pero la aritmética en los *Elementos* no tiene una estructura axiomática como la geometría. Además no tuvo la misma utilidad para las matemáticas aplicadas que la parte dedicada a la geometría. No es extraño, por lo tanto, que estos libros se tradujeran menos a las lenguas vernáculas o que en el Renacimiento se publicaran en Europa muchos libros de aritmética que no seguían el desarrollo de los *Elementos*. Esos manuales eran obras más prácticas, en las que se daba importancia a temas como la escritura simbólica de los números, las operaciones o las aplicaciones de la regla de tres al comercio que no aparecen en el texto de Euclides.

Se cree que se escribieron también algunos textos de *Elementos de Aritmética* en

Grecia, pero desgraciadamente se han perdido. Probablemente tampoco incluían una parte práctica, porque las matemáticas aplicadas en Grecia se consideraban propias de mercaderes y no de matemáticos, es decir de filósofos amantes de la sabiduría.

Libro X

En el libro décimo se estudian las magnitudes inconmensurables entre sí. Comienza con cuatro definiciones en las que se explica lo que son los segmentos conmensurables e inconmensurables, es decir racionales e irracionales. También se definen cantidades "conmensurables en cuadrado" que son las que si se elevan al cuadrado tienen una medida común.

Con 115 proposiciones éste es el más extenso de todos los libros de los *Elementos*. Pero la mayor parte de sus proposiciones no tienen actualmente mayor interés. Hoy en día se conocen procedimientos mejores que los desarrollados en este libro para trabajar con números irracionales. La proposición más interesante es la primera que afirma:

"1. Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas."

Junto a la definición V.4, esta proposición indica que las magnitudes que estudia Euclides tienen una estructura arquimedeana. Además esta propiedad se necesita en el libro XII para demostrar las proposiciones sobre áreas y volúmenes.

En la proposición segunda se dice que dos cantidades son inconmensurables si al tratar de hallar su máximo común divisor, por el proceso que se ha descrito en el libro VII, el algoritmo no tiene fin. Las proposiciones siguientes, hasta la 17 tratan de propiedades generales de magnitudes conmensurables e inconmensurables. Desde la proposición 17 hasta la 21 se estudian las relaciones que hay entre la conmensurabilidad de los lados y la de los cuadrados o rectángulos dibujados sobre ellos. En la proposición 21 se comienza el estudio de distintos tipos de irracionales con la introducción del segmento llamado "medial", que es la media proporcional entre dos segmentos conmensurables en cuadrado. Es decir, un medial es un irracional de la forma $\sqrt{aa\sqrt{b}}$ ó $a\sqrt[4]{b}$, con a y b fracciones numéricas. Las proposiciones siguientes hasta la 35 relacionan los mediales con líneas o rectángulos y estudian cuando son conmensurables en potencia. De la proposición 36 en adelante se estudian cantidades irracionales del tipo $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, donde a y b son conmensurables. Se llegan a definir hasta doce categorías diferentes de irracionales de esta clase, llamados binomiales. Las proposiciones sobre binomial van desde la 36 hasta la 72 y a esas cantidades se les dedica también seis definiciones, que están colocadas detrás de la proposición 47.

Las expresiones similares, pero con una resta dentro de la raíz, $\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, se les llama apótomas y a ellas se dedican las proposiciones que van desde la 73 hasta 110. También hay seis definiciones sobre apótomas que se encuentran detrás de la proposición 84.

La utilidad del estudio de estas propiedades y de estos números irracionales no es evidente. Se cree que debían servir para la resolución de ecuaciones de segundo grado o de ecuaciones bicuadradas, por métodos geométricos. Pero la única vez que se utilizan en los *Elementos* es en el libro XIII para encontrar los lados de los poliedros regulares inscritos o circunscritos en una esfera. Las apótomas, por ejemplo, se utilizan en la proposición XIII.17.

Este libro resulta difícil de estudiar. Por su complejidad y por la falta de aplicaciones claras el matemático e ingeniero flamenco Simon Stevin (1548-1620) dijo de él que : "La difficulté du dixiesme Livre d'Euclide est à plusieurs devenue en horreur, voire jusque à l'appeler la croix des mathématiciens, matière trop dure à digerer, et en la quelle n'aperçoivent aucune utilité". Desde entonces a este libro se le llama "la cruz de los matemáticos".

Libro XI

Los tres libros restantes, XI, XII y XIII, de los *Elementos* están dedicados a la geometría del espacio. Sus definiciones van agrupadas al comienzo del libro XI. Son 28 en total y en ellas se precisan objetos y relaciones habituales de la geometría del espacio, como rectas y planos; paralelismo y perpendicularidad; ángulos diedros y poliedros; pirámide, prisma, esfera, cono, cilindro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro.

Es interesante observar que en esta parte no le importa al autor utilizar el movimiento en las definiciones. Por ejemplo de la esfera dice que:

"14. Cuando el diámetro de un semicírculo permanece fijo y el semicírculo gira hasta volver a la posición de la que empezó a girar, la figura formada es una esfera"

[Vera, 1970, v. I, p. 919]

Es posible que estas definiciones estén tomadas de algún libro anterior y que Euclides no las corrigiera con tanto rigor como las del primer libro. Eso podría explicar también que se defina una división de los conos en rectos, obtusángulos y acutángulos, que luego no se usa.

En las primeras proposiciones se demuestra que una recta no puede tener segmentos en dos planos paralelos y que dos rectas que se cortan determinan un plano. En la tercera se afirma que dos planos que se cortan definen una recta. A continuación van varias proposiciones dedicadas a estudiar el paralelismo y la perpendicularidad entre rectas, entre rectas y planos, y entre planos. Desde la proposición 20 hasta la 26 se estudian los ángulos sólidos y desde la proposición 27 hasta la última los paralelepípedos y los prismas. La proposición 34, por ejemplo, afirma que si dos paralelepípedos son iguales, es decir tienen el mismo volumen, sus bases son inversamente proporcionales a sus alturas. De estas últimas proposiciones varias sirven para preparar los lemas que aparecen en el Libro XII.

Libro XII

El Libro XII está dedicado a la obtención del área del círculo y los volúmenes de los sólidos más corrientes. Las proposiciones 1 y 2 sirven para demostrar que los círculos son proporcionales al cuadrado de sus diámetros. En las 3, 4 y 5 se demuestra que las pirámides de igual altura y base triangular tiene el volumen proporcional a sus bases. En las proposiciones que van desde la 6 hasta la 9 se relacionan los volúmenes de los prismas y de las pirámides. La proposición 10 muestra que el volumen de un cono es un tercio del de un cilindro que tiene la misma base y altura. En las proposiciones siguientes, hasta la 16, se estudia la relación entre el volumen y las bases o las alturas en los conos y en los cilindros. En la proposición 18 se da el volumen de una esfera:

"18. Las esferas son entre sí como las razones triplicadas de sus diámetros" [Vera, 1970, v. I, p. 958].

Como se puede ver la forma de introducir las áreas y los volúmenes en *Los Elementos* es diferente a la que se usa actualmente. No se indica una fórmula para el volumen, como $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, sino que se determina la proporcionalidad entre las magnitudes que intervienen.

La dificultad principal de este libro está en las demostraciones. Actualmente las áreas y los volúmenes se hallan por medio de integrales. Pero eso supone saber trabajar con métodos infinitesimales. En la antigua Grecia no se tenía una definición rigurosa de límite y las demostraciones que empleaban infinitésimos no se aceptaban por basarse en conceptos imprecisos. Se conocía, sin embargo, un procedimiento que permitía demostrar con rigor el volumen o el área de una figura curvilínea si se sabía de antemano el resultado. A ese método, que es un caso particular del de reducción al absurdo, se le llama "método de exhausción".

Supongamos, por ejemplo, que se quiera demostrar que el área de un círculo es proporcional a su diámetro al cuadrado, proposición XII.2. Se sabe por la proposición anterior que las áreas de los polígonos regulares inscritos en un círculo cumplen esa propiedad. Para demostrar que esa proporcionalidad la cumplen también las esferas se supone que no es cierto, es decir se da por bueno que:

$$\frac{d^2}{d'^2} = \frac{\text{á}reaP}{\text{á}reaP'} = \frac{\text{á}reaC}{S} \qquad [1]$$

donde $S \neq$ área de C'. En primer lugar se considera que S es menor que el área del círculo C'. Se observa que si se inscriben en un círculo primero cuadrados, luego octógonos, y se continúa duplicando el número de lados de los polígonos, el área comprendida entre el polígono y el círculo se va reduciendo en más de la mitad en cada paso. Por la proposición X.1, se sabe que continuando el proceso esa diferencia puede ser menor a cualquier cantidad dada y en particular menor que área de $C' - S$. Supongamos que eso comience a suceder para el polígono P'_i. Eso implicaría que para ese polígono área de $P'_i > S$. Pero si en la igualdad de razones [1] el denominador de la segunda fracción es mayor que el de la tercera el numerador también lo debe ser para que las fracciones sean iguales. Por lo tanto área de $P_i >$ área de C. El polígono inscrito tiene un área mayor a la del círculo en el que se inscribe, lo que es absurdo. Luego S no puede ser menor. Con un razonamiento parecido se demuestra que S no puede ser mayor que el área de C', y se concluye que las áreas de los círculos deben ser proporcionales a sus diámetros al cuadrado pues cualquier otra posibilidad es absurda.

Las demostraciones por el método de exhausción son siempre largas. Además, es necesario conocer con antelación la dependencia buscada. Pero, utilizando ese procedimiento en las proposiciones 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 16, 17 y 18, Euclides logra demostrar con rigor el área del círculo y el volumen de pirámides, conos, cilindros y esferas.

Libro XIII

El objetivo del libro XIII es la construcción de los cinco sólidos regulares. Consta de 18 proposiciones. Se comienza con seis proposiciones que estudian cuestiones sobre líneas cortadas en media y extrema razón. En la séptima se examinan los pentágonos equiangulares. En la proposición octava se afirma que las diagonales de un pentágono se cortan en la razón áurea. Desde la proposición novena hasta a la duodécima se halla la razón entre los lados de los pentágonos, hexágonos y decágonos regulares inscritos en una misma circunferencia y también la razón entre el diámetro de esa circunferencia y dichos lados.

Los problemas planos que se resuelven en estas primeras proposiciones sirven de base a las construcciones posteriores. Finalmente, en la proposición 13 se muestra como inscribir un tetraedro en una esfera, en la siguiente un octaedro, en la 15 un cubo, en la 16 un icosaedro, y en la 17 un dodecaedro. La última proposición está dedicada a comparar entre sí los lados de las cinco figuras regulares y en ella se demuestra que no hay más sólidos regulares que esos cinco.

Algunos autores han afirmado que Euclides era partidario de la filosofía de Platón y que escribió *Elementos* para enseñar como se construyen los cinco sólidos platónicos. Es posible que estuviera influido por esa escuela filosófica, pero no es justo decir que los *Elementos* se redactaron para hallar esos cuerpos regulares. La mayor parte de las materias que se tratan en esta obra nada tienen que ver con esos sólidos. Por los temas que se estudian y por la forma en que se analizan los *Elementos* son un tratado de matemáticas, que toca muchas materias fundamentales de geometría y de aritmética, con una precisión y una claridad inesperadas en una obra escrita hace 2300 años. Este último capítulo no parece tener un peso especial en el conjunto de la obra.

4.3 Transmisión, tutoría y origen de los elementos

Los *Elementos* son un texto valioso de geometría, pero lo que hace que sea una obra admirable es la antigüedad que tiene. Por eso es conveniente explicar por qué se puede estar seguro de que el texto que ahora se atribuye a Euclides coincide con lo que un matemático del siglo III a. de C. escribió.

Desgraciadamente los libros en la época de Euclides se solían escribir en unas láminas obtenidas a partir de las hojas de los papiros. Esa materia aguanta bien en climas calurosos y secos, pero en climas fríos o húmedos se descompone con rapidez. Por eso se puede asegurar que los *Elementos* fueron copiados y recopiados frecuentemente hasta que en el siglo II de nuestra era se comenzó a escribir en pergamino que es una materia más duradera. La copia completa más antigua que se conserva de esta obra fue escrita en el año 888. Hay algunos fragmentos anteriores, incluso un trozo de cerámica del año 225 a. d C. que contiene algunos textos que pueden ser de los *Elementos*.

Si se ha podido llegar a conocer qué partes son originales y cuales fueron incorporadas en la Antigüedad en esos manuscritos es porque han sobrevivido bastantes versiones de orígenes diferentes y, comparándolas, se pueden descubrir los añadidos. La mayor parte de los ejemplares antiguos que se conservan son copias de una versión de los *Elementos* que realizó Teón de Alejandría (s. IV). Este matemático reconoce en otros escritos que su versión de los *Elementos* contiene explicaciones y cambios añadidos por él. Desde comienzos del siglo XIX se sabe que un manuscrito que se encuentra en la biblioteca del Vaticano no tiene esos cambios y es más fiel al texto de Euclides que las de origen “teonino”, aunque esa copia fue escrita en el siglo X. Su texto está completo y ha ejercido una gran influencia en las últimas ediciones de los *Elementos*.

Se conservan también otras versiones de los *Elementos* que proceden de las traducciones al árabe que se hicieron en los siglos IX y X. Partiendo de estos textos árabes se ha podido saber algo sobre los cambios que introdujeron en sus copias de los *Elementos* otros sabios griegos, como Heron. Pero, las versiones traducidas al árabe no son fieles porque algunas incorporan cambios importantes para hacerlas más pedagógicas y sencillas y otras, más que traducciones, son comentarios de los *Elementos*.

Desde la aparición de la imprenta es más fácil seguir la transmisión de los *Elementos*. La primera edición impresa la publicó E. Ratdolt en Venecia en 1482. No es muy exacta porque procede de la versión latina medieval de Campano. El mejor texto impreso fue durante varios siglos el del humanista italiano F. Commandino de Urbino que fue publicado en 1572. Actualmente la versión mejor considerada es la que se encuentra en la recopilación *Euclidis Opera Omnia* (1883-1916) de J. L. Heiberg y H. Menge. En esa obra se comparan las versiones antiguas que han llegado hasta nosotros y se tienen en cuenta los fragmentos de papiros antiguos para dar una versión crítica en la que se discuten las variaciones que aparecen en los textos antiguos y se explica por qué se aceptan o rechazan.

De todo lo anterior se puede concluir que se puede estar razonablemente seguro de que la versión que se considera conforme con el texto original es muy parecida a la obra que escribió Euclides. Sobre el autor, Euclides, se sabe menos que sobre los *Elementos*. La información que se tiene sobre su vida coincide, a grandes rasgos, con lo que el filósofo neoplatónico Proclo de Licia (s. V a. D.) dice sobre él en su libro *Comentarios a los Elementos* de Euclides:

"En la composición de sus *Elementos*, Euclides coordinó muchos trabajos de Eudoxio, perfeccionó los de Teeteto y demostró irrefutablemente los que sus predecesores habían presentado de una manera difusa.

Vivió bajo Ptolomeo I porque Arquímedes, posterior a este, lo menciona. Se dice que Ptolomeo le preguntó un día si no habría un camino más corto que el de la *Enseñanza de los Elementos* para aprender Geometría, y le respondió "En Geometría no hay ningún camino especial para los reyes." Euclides es, por tanto, más moderno que los discípulos de Platón y más antiguo que Arquímedes y Eratóstenes, pues que estos últimos fueron contemporáneos, como dice Eratóstenes en alguna parte y era partidario de la filosofía de Platón, por lo cual expuso como resultado de su *Enseñanza de los Elementos* la construcción de las figuras platónicas."

La anécdota no parece fiable. Al parecer Estobaeo cuenta una historia similar con Menecmo y Alejandro el Grande como protagonistas. Tampoco parece muy segura la pertenencia de Euclides a la escuela platónica (Proclo sí que era un ferviente partidario de Platón). Sin embargo, el resto de la información parece plausible y coincide con los datos que se pueden deducir de los escritos de otros autores de la Antigüedad y de la comparación de la obra de Euclides con la de otros matemáticos, como Apolonio, Arquímedes o Autolico, y con la de filósofos como Aristóteles.

Faltaría por discutir si ese texto lo escribió Euclides o si se trata de una recopilación de obras anteriores. Se sabe que en esa época otros matemáticos griegos, como Hipócrates de Quíos, Leon o Teudio de Magnesia escribieron otros libros sobre los *Elementos* de la geometría. Parece evidente que el texto de Euclides era mejor que el de esos tratados pues ha continuado siendo reproducido hasta nuestros días, mientras que los escritos de esos otros autores han desaparecido. Pero, también se cree que la mayoría de los resultados que se presentan en los *Elementos* se conocían con anterioridad, aunque la forma de presentarlos sea de Euclides. Se considera que los orígenes de los distintos libros son los siguientes:

Los libros I, III y VI se cree que son el resultado de una elaboración hecha por Euclides partiendo del contenido de tratados de geometría anteriores.

Los libros II, VII, VIII y IX se piensa que provienen de las doctrinas de los pitagóricos.

El libro IV tiene su origen en la escuela pitagórica, pero está completado con algunos descubrimientos de Teeteto y de otros matemáticos.

En cuanto al libro V se piensa que esa forma de definir la igualdad de razones entre magnitudes la propuso Eudoxo, pero que Euclides, partiendo de dicha definición, ideó el resto del libro.

El libro X se cree que proviene de los escritos de Teeteto.

Al libro XI no se le suele dar un origen preciso. En él se nota influencia de Platón y Aristóteles, pero la mayor parte debe ser una reelaboración de unos *Elementos* de geometría anteriores.

En el libro XII el método de exhausción, que resulta fundamental en su desarrollo, se considera que fue descubierto por Eudoxo.

Del libro XIII se dice que proviene de Teeteto y que fue mejorado por Aristeo.

Además en el texto hay muchas cuestiones que se cree que fueron descubiertas por Euclides. Los comentaristas antiguos le atribuyen el famoso 5^{o} postulado, la demostración del teorema de Pitágoras que aparece en los *Elementos* y la generalización de ese teorema que aparece en la proposición VI.31, entre otras partes.

Bibliografía

Como se ha comentado el texto más ajustado de los *Elementos* se encuentra en J.L. Heiberg y H. Menge, 18831916, *Euclidis Opera Omnia*, 8 vol. y suplementos, Ed. Teubner Leipzig.

Una versión en griego antiguo se puede consultar en la web en el proyecto Perseus: http://www.perseus.tufts.edu/cgi−bin/ptext?lookup=Euc.+1

Una edición asequible completa y exacta en inglés es la de T. L. Heath, 1908, *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath*, 3 vol., Cambridge University Press. Hay una segunda edición en la misma editorial de 1925, que ha sido reimpresa varias veces por Dover Publications a partir de 1956.

Los comentarios críticos de esta versión de Heath son tan importantes como el texto mismo. No se limita a cuestiones de lógica o de lingüística. Hay también muchas

observaciones muy pertinentes sobre aspectos matemáticos.

En la web se puede consultar esta versión de Heath en la dirección:
http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/elements/elements.html

El texto está algo simplificado para hacerlo más comprensible. El responsable de esta edición es D. E. Joyce, de la Universidad de Clark. Tiene también comentarios, aunque son menos completos que los de Heath, y abundantes figuras.

Hay una traducción al catalán de esta versión de Joyce, sin comentarios ni dibujos, realizada por J. Domenech Larraz, que se puede consultar en:
http://www.xtec.es/ jdomen28/indexeuclides.htm

En castellano la mejor edición es la de Mª. L. Puertas Castaños, *Elementos Libros I-IV (1991), Elementos Libros V- IX (1994), Elementos Libros X-XII (1996).* Ed. Gredos. Colección Biblioteca Clásica. Madrid. Es una traducción cuidada de la versión griega de Heiberg. Incorpora algunos comentarios de Heath sobre aspectos matemáticos, pero no llega a tener la riqueza de esa versión inglesa. En la introducción de L. Vega se profundiza en aspectos lógicos e históricos.

Una versión menos precisa en cuestiones lingüísticas es la de F. Vera "Euclides: *Elementos* de Geometría" En: *Científicos griegos* 1970, v. I, p.702-980. Este autor simplifica las demostraciones en los últimos libros y en general prefiere que la traducción sea comprensible a que sea fiel. Las notas al pie de página sobre aspectos matemáticos son adecuadas, pero demasiado escasas.

Una edición antigua bastante correcta, pero sólo de los seis primeros libros es la de R. Zamorano, 1576, *Los Seis Libros Primeros de la Geometria de Euclides. Traduzidos en légua Española por Rodrigo Çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Magestad en la casa de la Contratació de Sevilla Dirigidos al jlustre señor Luciano de Negró, Canonigo dela Sancta yglesia de Sevilla. Con licencia del Consejo Real. En Sevilla en casa de Alonso de la Barrera* 1576.

Ha sido publicada de nuevo en 1999, en una reedición facsímil a cargo de J. Mª Sanz Hermida, por la Universidad de Salamanca.

En francés se puede consultar la versión de Vitrac, publicada por P.U.F., Paris 1990. También se tiene la versión clásica de Peyrard *Les Oeuvres d'Euclide* (1819) que ha sido reeditada por ed. Blanchard en 1966. Esta edición fue la primera que se hizo tratando de recuperar el texto original de Euclides. No se han utilizado esas versiones en este estudio. Sí se ha consultado otra edición, que es uno de los mejores ejemplos de las versiones pedagógicas del Renacimiento y del Barroco:

D. Henrion, 1632, *Les quinze livres des Eléments Géometriques d'Euclide Traduits* *en François par D. Henrion Professeur es Mathematiques, imprimez, reueus & corrigez du vivant de l'Autheur: avec commentaires beaucoup plus amples & faciles & des figures en plus grand nombre qu'en toutes les impressions precendentes Plus le Livre des Donnez du mesme Euclide aussi traduict en François par ledit Henrion, & imprimé de son vivant A Paris, De l'impremerie d'Isaac Dedin Et se vendent en l'Isle du Palais, à l'Image S.Michel, par la veufue dudit Henrion. M.DC.XXXII.*

Este libro se puede consultar en la página web de la Bibliothèque Nationale de Paris: http://gallica.bnf.fr/

Sobre la relación entre los *Elementos* y los fundamentos de las matemáticas se puede consultar la conferencia de L. J. Hernández Paricio, 2000, "Sobre los principios fundamentales de la Geometría", lección inaugural del curso 2000-2001 de la Universidad de la Rioja en la dirección
http://www.unirioja.es/Prensa/Noticias/l1.html/

Sobre la historia del 5º postulado se puede ampliar en R. Bonola, 1923, *Geometrías no Euclidianas. Exposición Histórico-Crítica de su Desarrollo*, Ed. Calpe, colección Biblioteca de ideas. Como esta edición no es fácil de encontrar, se puede acudir a la versión italiana que se encuentra en:
http://historical.library.cornell.edu/math/math_B.html

También se puede saber más sobre Euclides y su obra consultando los artículos de I. Bulmer-Thomas, 1971, "Euclid. life and works" y John Murdoch, 1971, "Euclid: Transmission of the Elements" en *Dictionary of Scientific Biography* (1971, New York, v. 4, p. 414-437 y 437-459), o de A. Dou, 1986, "Euclides" en: *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII.* Ed. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid