MA-1003: Apuntes de Cálculo III

Joseph C. Várilly

Marzo del 2015

1 Superficies y Curvas

1.1 Rectas y planos, superficies cuadráticas

Este es un breve repaso de la geometría analítica básica del plano $\mathbb{R}^2$ y del espacio $\mathbb{R}^3$.

El punto general del plano $\mathbb{R}^2$ tiene coordenadas (x, y). El punto general del espacio $\mathbb{R}^3$ tiene coordenadas (x, y, z). Las coordenadas de puntos serán *reales* (no complejos) a lo largo de este curso.

En $\mathbb{R}^3$, conviene usar *notación vectorial*: se escribe

$$\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$$

para denotar la posición de un punto del espacio. La cantidad $\vec{\mathbf{r}}$ se llama un *vector*.

Rectas en $\mathbb{R}^2$

Una recta en $\mathbb{R}^2$ tiene una **ecuación de primer grado**:

$$Ax + By + C = 0,$$

con $A^2 + B^2 > 0$ (es decir, se prohíbe el caso $A = B = 0$, por razones obvias).

La recta que pasa por el punto (x_0, y_0) con pendiente m tiene la ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

La **recta que pasa por dos puntos** distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene la ecuación:

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0. \tag{1.1}$$

Fíjese que esta ecuación (a) es de primer grado; y (b) pasa por los dos puntos indicados.

La última ecuación también puede escribirse en la forma

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

y estas fracciones determinan una nueva variable auxiliar o **parámetro** t, al poner

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} =: t.$$

Fíjese que los numeradores son expresiones de primer grado, pero los denominadores son *constantes*. Si se escribe $a = x_2 - x_1$ y $b = y_2 - y_1$, el sistema

$$\frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a} = t$$

se convierte en *un par de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x &= x_1 + at, \\ y &= y_1 + bt, \end{aligned}$$

que *representa la misma recta* (1.1) *en forma paramétrica*. Esto es, hay dos ecuaciones en lugar de una, pero dependen de una variable auxiliar t. Ahora bien, *si se elimina* la t de entre estos dos ecuaciones, se regresa a la sola ecuación (1.1) para las variables originales x, y.

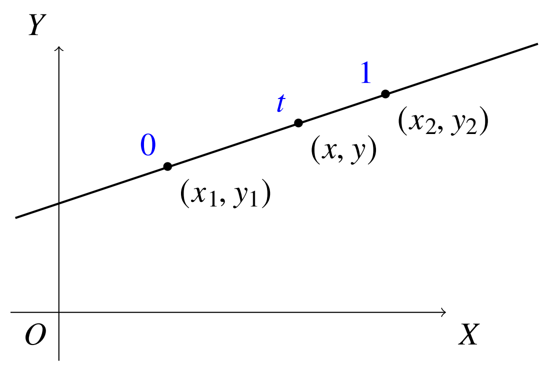


Figura 1.1: Una recta que pasa por dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$

¿Cuál es la utilidad de la variable extra t? Sirve para identificar los puntos individuales de la recta. Al sustituir $a = x_2 - x_1$ y $b = y_2 - y_1$ en el sistema anterior, se obtiene una fórmula importante:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1), \end{aligned}$$

se convierte en

$$\begin{aligned} x &= (1 - t)x_1 + t x_2, \\ y &= (1 - t)y_1 + t y_2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Esta fórmula representa *la recta que pasa por dos puntos* distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pero *en forma paramétrica*. El parámetro t vale 0 en (x_1, y_1) y vale 1 en (x_2, y_2). Los valores $0 \leq t \leq 1$ corresponden a los puntos del *segmento de recta* con extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2); véase la Figura 1.1.

Curvas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$

Una *ecuación de segundo grado* en el plano es de la forma

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0.$$

Según las coeficientes A, B, C, F, G, H en esta fórmula, hay curvas de diversa naturaleza. Por ejemplo,

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{es } \textit{un sólo punto} \quad (x, y) = (0, 0).$$

Peor todavía, la ecuación

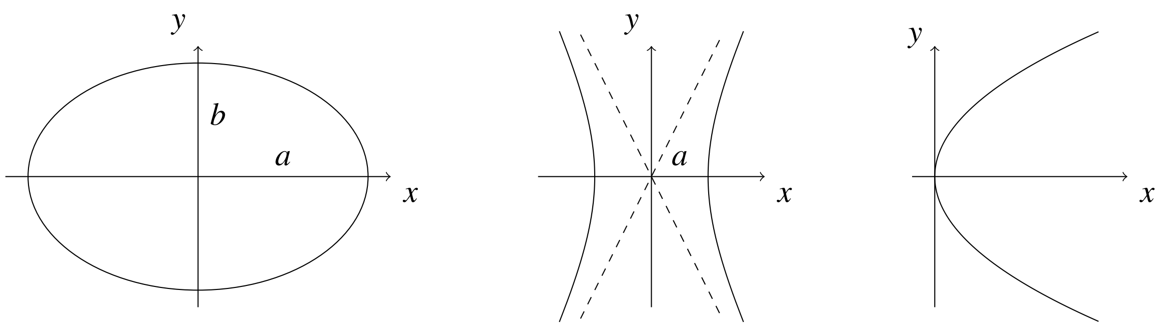
$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad \text{es una } \textit{curva vacía},$$

es decir, no tiene puntos porque la ecuación no tiene solución alguna para x, y números reales. (No interesan las soluciones complejas.)

Al excluir tales "casos degenerados", queda el *caso reducible* en donde el lado izquierdo se factoriza en el producto de dos expresiones de primer grado:

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Esta ecuación representa el *par de rectas* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Un punto (x, y) sobre cualquiera de estas dos rectas cumple la ecuación compuesta.



(a) elipse (b) hipérbola (c) parábola

Figura 1.2: Curvas cuadráticas irreducibles

La mayoría de las ecuaciones cuadráticas no son degenerados ni reducibles. Se destacan tres casos importantes (Figura 1.2):

- La ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es una **elipse** con *semiejes* $a > 0$ y $b > 0$.

  (Cuando $a = b$, este es $x^2 + y^2 = a^2$, el círculo de radio a centrado en el origen $(0, 0)$.

- La ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es una **hipérbola**.

  Esta ecuación no tiene puntos en común con la ecuación reducible $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, la cual representa dos rectas $x/a + y/b = 0$, $x/a - y/b = 0$, que se llaman *asíntotas* de la hipérbola.

- La ecuación $y^2 = 4cx$ es una **parábola**. La recta $y = 0$ (esto es, el eje x) es un *eje de simetría* de esta parábola: la reflexión $x' = x$, $y' = -y$ deja la parábola invariante.

Ahora bien: cualquier transformación $(x, y) \mapsto (x', y')$ del plano que lleva rectas en rectas tiene la forma general

$$\begin{aligned} x &= l\,x' + m\,y' + n, \\ y &= p\,x' + q\,y' + r, \end{aligned}$$

con $lq - mp \neq 0$. Tales cambios de coordenadas no cambian el aspecto general de una curva cuadrática. Resulta que *cualquier curva* no degenerada *con ecuación cuadrática irreducible* puede cambiarse, de este modo, en una de las tres formas mencionadas: es una elipse, una hipérbola o una parábola.

Elementos de dibujo en $\mathbb{R}^3$

Los **ejes coordenados** $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$ forman un *triedro* que se representan en el plano como sigue. El eje y positivo (esto es, la semirecta $\overrightarrow{Oy}$) apunta hacia la derecha; el eje y positivo apunta hacia arriba; y el eje x positivo apunta "hacia adelante". Hay que representar el eje x en una dirección aproximadamente sur-oeste, para dar la ilusión óptica de una flecha que sale del plano yz de modo perpendicular: véase la Figura 1.3.

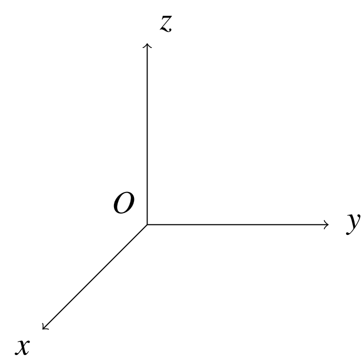


Figura 1.3: El triedro de los ejes cartesianos

Un *plano* se representa por un paralelogramo, que indica su posición e inclinación de modo esquemático. (Se quiere indicar una lámina de acrílico transparente que ocupa la posición del plano en el espacio.) Si se conoce los tres puntos en donde el plano corta los ejes, el triángulo formados por estos tres vértices también sirve para representar el plano. Los planos coordenados (el plano xy, horizontal; el plano xz y el plano yz, verticales) quedan delineados por los ejes cartesianos.

Una **superficie** que no sea un plano puede representarse por un sistema de **cortes verticales y horizontales**, como sigue. Al poner $x = 0$, se obtiene la intersección de la superficie con el plano yz (vertical, de la hoja), que en muchos casos (aunque no siempre) es la *silueta* de la superficie. Al poner $y = 0$, se obtiene la intersección de la superficie con el plano xz (vertical pero lateral). Luego, al poner $z = k$ para varios valores constantes de k, se obtiene las cortes horizontales de la superficie a las alturas k. Todas estas curvas sirven para montar una representación visual de la superficie.

Ejemplo 1.1. Para dibujar la superficie $x^2 + y^2 = 4z$ se trazan las siguientes curvas:

- Corte $x = 0$: se obtiene la curva $y^2 = 4z$ en el plano yz, la cual es una *parábola*.
- Corte $y = 0$: se obtiene la curva $x^2 = 4z$ en el plano xz, la cual es otra parábola.
- Cortes $z = k$: se obtiene la familia de curvas horizontales $x^2 + y^2 = 4k$ en los planos respectivos $z = k$. Si $k > 0$, estos son *círculos* de radios $2\sqrt{k}$. Si $k = 0$, la "curva" se reduce al punto $(0, 0, 0)$, el origen de coordenadas. Si $k < 0$, la ecuación $x^2 + y^2 = 4k$ no tiene soluciones reales; por tanto, no hay puntos de la superficie debajo del plano $z = 0$.

Al trazar las dos parábolas y dos o tres de los círculos, se obtiene la forma de una canasta redonda: Figura 1.4. Esta superficie es un *paraboloide elíptico*.

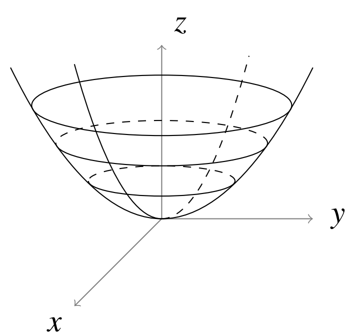


Figura 1.4: El paraboloide elíptico $x^2 + y^2 = 4z$

Ejemplo 1.2. Para dibujar la superficie $x^2 + y^2 = z^2$ se trazan las siguientes curvas:

- Corte $x = 0$: se obtiene $y^2 = z^2$ en el plano yz; este es una *par de rectas* $y = \pm z$.
- Corte $y = 0$: se obtiene $x^2 = z^2$ en el plano xz; este es otro par de rectas $x = \pm z$.
- Cortes $z = k$: se obtiene la familia de curvas horizontales $x^2 + y^2 = k^2$ en los planos respectivos $z = k$. Si $k \neq 0$, estos son círculos de radios $\sqrt{k^2} = |k|$. (En este caso, k puede ser negativo.) Si $k = 0$, la "curva" se reduce al punto $(0, 0, 0)$.

Al trazar las cuatro rectas y algunos de los círculos, se obtiene la forma de un cono (de dos embudos),[1] con un "vértice" en el origen: véase la Figura 1.5. Esta superficie es un *cono recto circular*.

Ejemplo 1.3. Para dibujar la superficie $4x^2 + y^2 = 4$ se trazan las siguientes curvas:

- Corte $x = 0$: se obtiene $y^2 = 4$ en el plano yz; este es una *par de rectas* $y = \pm 2$. Estas rectas son *verticales*, porque sus ecuaciones no dependen de la altura z.

[1] El este curso, la palabra *cono* siempre se refiere a una superficie cónica con dos embudos. Cada uno de los embudos, por aparte, se llamará *semicono*.

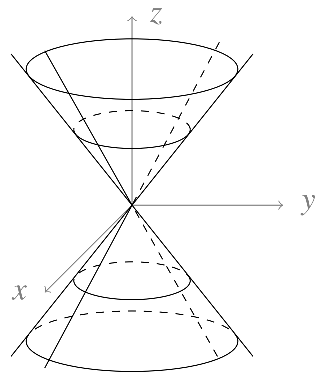


Figura 1.5: El cono recto circular $x^2 + y^2 = z^2$

- Corte $y = 0$: se obtiene $x^2 = 1$ en el plano xz; este es otro par de rectas $x = \pm 1$, que son también verticales.
- Cortes $z = k$: se obtiene la familia de curvas horizontales $4x^2 + y^2 = 4$ en los planos respectivos $z = k$. Todas ellas son elipses de semiejes 1 y 2, colocadas a varias alturas.

Al trazar las cuatro rectas y algunos de los círculos, se obtiene la forma de un *cilindro recto elíptico*: Figura 1.6.

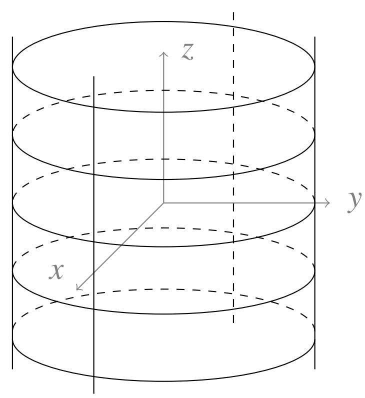


Figura 1.6: El cilindro recto elíptico $4x^2 + y^2 = 4$

Ejercicio 1.1. Trazar las siguientes superficies, mediante la técnica de los cortes verticales y horizontales:

(a) El *elipsoide* $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

(b) El *hiperboloide de una hoja* $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

(c) El *cilindro parabólico* $y = x^2$.

Planos en el espacio $\mathbb{R}^3$

En el espacio tridimensional, una *ecuación de primer grado* representa un **plano**:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

con $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. (Se prohíbe el caso $A = B = C = 0$.)

Un plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) tiene una ecuación de la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

El lado izquierdo de esta ecuación es un *producto escalar* (o "producto punto") de vectores:[2]

$$\vec{\mathbf{N}} \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0) = 0, \tag{1.3}$$

donde $\vec{\mathbf{N}} = (A, B, C)$, $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$ y $\vec{\mathbf{r}}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

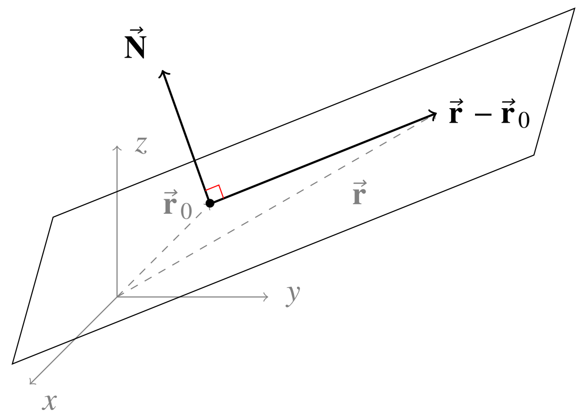


Figura 1.7: El plano que pasa por el punto $\vec{\mathbf{r}}_0$ con vector normal $\vec{\mathbf{N}}$

Recuérdese que dos vectores en $\mathbb{R}^3$ son *ortogonales* (es decir, perpendiculares) si y sólo si su producto punto es igual a cero. La ecuación (1.3) dice que el vector fijo $\vec{\mathbf{N}}$ es ortogonal al vector variable $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$ que se representa por una flecha desde el punto $\vec{\mathbf{r}}_0$ al punto $\vec{\mathbf{r}}$. Entonces el plano comprende todas las flechas que emanen de $\vec{\mathbf{r}}_0$ en direcciones perpendiculares a $\vec{\mathbf{N}}$; véase la Figura 1.7. Dícese que $\vec{\mathbf{N}}$ es un **vector normal** al plano. La dirección del vector $\vec{\mathbf{N}}$ determina la inclinación del plano; el punto particular $\vec{\mathbf{r}}_0$ ubica el plano entre la familia de planos paralelos con esta inclinación.

El plano que pasa por tres puntos $\vec{\mathbf{r}}_0, \vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2$ que no son colineales obedece la ecuación siguiente. (Para entender la fórmula, hay que conocer las propiedades básicas de los determinantes.) La ecuación es

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

[2] El *producto escalar* de dos vectores $\vec{\mathbf{a}} = (a, b, c)$ y $\vec{\mathbf{p}} = (p, q, r)$ es el número real $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}} := ap + bq + cr$.

Por expansión en la primera fila, este es una ecuación de primer grado en las variables x, y, z, por tanto representa un plano. Si $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0$, dos filas del determinante coinciden y por ende el determinante se anula; luego, el plano pasa por el punto $\vec{\mathbf{r}}_0$. de igual manera, pasa por $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$. (En general, el lado izquierdo es 6 veces el volumen del tetraedro con vértices $\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}_0, \vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2$. Este volumen se anula si y sólo si los cuatro vértices son coplanarios.)

Rectas en el espacio $\mathbb{R}^3$

Una **recta** en el espacio tridimensional es simplemente *la intersección de dos planos*:

$$
\begin{aligned}
A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\
A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Por esta razón, se requiere **dos ecuaciones** de primer grado para caracterizar una recta.

Tal como en el caso bidimensional, es posible introducir un *parámetro* t, en correspondencia con los diversos puntos de la recta. La **forma paramétrica** de las ecuaciones de una recta entonces requiere *tres* ecuaciones (de primer grado) en las cuatro variables x, y, z, t.

Por ejemplo, la recta que pasa por un punto $\vec{\mathbf{r}}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en la dirección $\vec{\mathbf{v}} = (l, m, n)$ —la cual es un vector constante, no nulo— obedece

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\,\vec{\mathbf{v}}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a tres ecuaciones escalares:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + lt, \\
y &= y_0 + mt, \qquad t \in \mathbb{R}. \\
z &= z_0 + nt,
\end{aligned}
$$

Al despejar la variable t de cada una de ecuaciones, se obtiene

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Ahora se puede suprimir la última ecuación, eliminado la variable t. El resultado es la llamada **forma simétrica** de las ecuaciones de la recta:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}\,. \tag{1.5}$$

Fíjese bien: al eliminar el parámetro, quedan *dos ecuaciones* (hay dos signos de igualdad presentes) para las variables cartesianas x, y, z.

Las ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos $\vec{\mathbf{r}}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{\mathbf{r}}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ se obtiene de (1.4) al cambiar $\vec{\mathbf{r}}_0$ en $\vec{\mathbf{r}}_1$ y al tomar $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$. Su forma paramétrica es entonces

$$\vec{\mathbf{r}} = (1 - t)\,\vec{\mathbf{r}}_1 + t\,\vec{\mathbf{r}}_2, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

De nuevo, el valor $t = 0$ corresponde al punto $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1$, el valor $t = 1$ corresponde al punto $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2$; y el rango $0 \le t \le 1$ corresponde al *segmento de recta* con extremos $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$.

La forma simétrica correspondiente es

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Si algún denominador se anula, el númerador debe anularse también. Por ejemplo, si $y_1 = y_2$ pero $x_1 \neq x_2$ y $z_1 \neq z_2$, este último par de ecuaciones es lo mismo que

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \qquad y = y_1.$$

1.2 Superficies especiales en $\mathbb{R}^3$

La clasificación de superficies cuadráticas en el espacio $\mathbb{R}^3$ es más compleja que la clasificación de las curvas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$. En esta sección no se abordará este problema en su totalidad, sino que se discutirá las superficies desde otro ángulo: dada una descripción geométrica de ciertas superficies, se requiere obtener su ecuación cartesiana.

Sin embargo, hay una clase de superficies cuadráticas que no necesita una introducción prolongada: las **esferas**. Una esfera posee un *centro* (x_0, y_0, z_0) y un radio R; se compone de todos los puntos (x, y, z) cuya distancia del centro es igual a R. Al emplear la fórmula de Pitágoras para calcular el cuadrado de esta distancia, se obtiene la ecuación de la esfera:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{1.7}$$

Al expandir las paréntesis, este es lo mismo que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2.$$

Entonces se ve que una ecuación cuadrática representa una esfera si y sólo si su parte cuadrática es (un múltiplo constante de) $x^2 + y^2 + z^2$. Además, la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Gx + 2Fy + 2Ez + C = 0$$

representa una esfera con centro $(-G, -F, -E)$ y radio $R = \sqrt{G^2 + F^2 + E^2 - C}$.

Cilindros

Definición 1.1. Un **cilindro** es una superficie formada por una familia de *rectas paralelas*, llamadas **generatrices**, que pasan por los puntos respectivos de una cierta **curva directriz**.

Un caso conocido es el *cilindro recto circular* $x^2 + y^2 = a^2$, formado por una familia de rectas verticales (todas ellas paralelas al eje z). Cada una de estas rectas pasa por un punto del círculo horizontal de centro $(0, 0, 0)$ y de radio a. Dicho círculo es la curva directriz, en este caso; la recta vertical $x = a\cos\theta$, $y = a \operatorname{sen}\theta$ pasa por el punto $(a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta, 0)$ del círculo. Hay una recta generatriz para cada valor de θ en el intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$, y la unión de todas estas rectas es el cilindro.

Más generalmente, la curva directriz no es necesariamente un círculo; ni siquiera tiene que ser una curva plana. Aun cuando la curva directriz queda dentro un plano, la dirección común no es necesariamente perpendicular a ese plano.

Para obtener la ecuación de un determinado cilindro, conviene adoptar la siguiente notación:

- un punto de la curva directriz se denotará por $\vec{\mathbf{r}}_0 = (x_0, y_0, z_0)$;
- un punto de la generatriz que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) se denotará por $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$;
- la dirección común de las generatrices se denotará por el vector $\vec{\mathbf{v}} = (l, m, n)$.

Una **curva** se concibe como *la intersección de dos superficies*. Como tal, requiere *dos ecuaciones* en las coordenadas (x_0, y_0, z_0) para su descripción. Los datos de se requieren para identificar un cilindro particular son: (a) el vector $\vec{\mathbf{v}}$ que da la dirección de las generatrices; y (b) un par de ecuaciones que describen la curva directriz:

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, z_0) &= 0, \\ G(x_0, y_0, z_0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

De acuerdo con la fórmula (1.4), las ecuaciones paramétrices de la recta generatriz que pasa por $\vec{\mathbf{r}}_0$ en la dirección $\vec{\mathbf{v}}$ son los siguientes:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + l\,t, \\ y &= y_0 + m\,t, \\ z &= z_0 + n\,t. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Fíjese que las fórmulas (1.8) y (1.9) dan 5 ecuaciones para 7 variables $x, y, z, x_0, y_0, z_0, t$. Si ahora *se eliminan las variables auxiliares* x_0, y_0, z_0, t de entre estas ecuaciones, quedará una sola ecuación en las variables cartesianas x, y, z. Esta es la ecuación deseada del cilindro.

Ejemplo 1.4. Hallar la ecuación del cilindro que pasa por la curva directriz

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \qquad x + y + z = 3$$

en la dirección paralela a la recta $x = y = z$.

Las ecuaciones $x = y = z$ están en la forma simétrica (1.5):

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}.$$

Luego esta recta pasa por el origen $(0, 0, 0)$ —aunque esta información es irrelevante, porque sólo interesa su dirección. Esta dirección es $\vec{\mathbf{v}} = (1, 1, 1)$, tomado de los denominadores de las ecuaciones de la recta.

Las ecuaciones de la curva directriz se escriben con las variables x, y, z reemplazadas por x_0, y_0, z_0. Entonces las fórmulas (1.8) y (1.9) dan 5 ecuaciones particulares:[3]

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 &= 9, \\ x_0 + y_0 + z_0 &= 3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + t, \\ y &= y_0 + t, \\ z &= z_0 + t. \end{aligned}$$

[3]La curva directiz es la intersección de la esfera $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9$ con un plano $x_0 + y_0 + z_0 = 3$ que pasa por su centro; es decir, es un *gran círculo* sobre la esfera.

Se eliminan x_0, y_0, z_0 al despejar estas variables de las últimas ecuaciones:

$$x_0 = x - t, \qquad y_0 = y - t, \qquad z_0 = z - t,$$

y al sustituir los lados derechos en las otras:

$$\begin{aligned} (x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 &= 9, \\ (x-t) + (y-t) + (z-t) &= 3. \end{aligned}$$

En seguida, se elimina t de la segunda ecuación remanente y se sustituye la expresión obtenida para t en la otra ecuación:

$$x + y + z - 3t = 3 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{x + y + z - 3}{3}.$$

La ecuación cartesiana del cilindro es entonces

$$\left(\frac{2x - y - z + 3}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x + 2y - z + 3}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x - y + 2z + 3}{3}\right)^2 = 9.$$

Se puede simplificar un poco al multiplicar por 9 para “limpiar” los denominadores:

$$(2x - y - z + 3)^2 + (-x + 2y - z + 3)^2 + (-x - y + 2z + 3)^2 = 81.$$

Una simplificación completa, al resolver estos cuadrados, lleva a la ecuación cuadrática

$$6x^2 - 6xy - 6xz + 6y^2 - 6yz + 6z^2 - 54 = 0,$$

o bien

$$x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2 - 9 = 0.$$

Conos

Definición 1.2. Un **cono** es una superficie formada por una familia de rectas, sus *generatrices*, que pasan por un punto fijo —el **vértice** del cono— y también por los puntos respectivos de una cierta *curva directriz*.

Un caso conocido es el *cono recto circular* $x^2 + y^2 = z^2$, formado por una familia de rectas que pasan por el origen $(0,0,0)$. Cada una de estas rectas pasa también por un punto del círculo horizontal de centro $(0,0,1)$ y de radio 1, el cual es la curva directriz, en este caso; la recta oblicua $x = t\cos\theta$, $y = t \operatorname{sen}\theta$, $z = t$ pasa por el punto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$ del círculo. Hay una recta generatriz para cada valor de θ en el intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$, y la unión de todas estas rectas es el cono.

Para obtener la ecuación de un determinado cono, se adopta la siguiente notación:

- un punto de la curva directriz se denotará por $\vec{\mathbf{r}}_0 = (x_0, y_0, z_0)$;
- un punto de la generatriz que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) se denotará por $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$;
- el vértice del cono se denotará por el vector $\vec{\mathbf{u}} = (a, b, c)$.

La curva directriz se describe otra vez por dos ecuaciones de tipo (1.8). La recta generatriz en este caso obedece la fórmula (1.6):

$$\vec{\mathbf{r}} = (1-t)\,\vec{\mathbf{u}} + t\,\vec{\mathbf{r}}_0, \qquad t \in \mathbb{R},$$

o bien, equivalentemente:

$$\begin{aligned} x &= a(1-t) + t\,x_0, \\ y &= b(1-t) + t\,y_0, \\ z &= c(1-t) + t\,z_0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Al eliminar la variables auxiliares x_0, y_0, z_0, t de entre las ecuaciones (1.8) y (1.10), se obtiene la ecuación deseada del cono.

Ejemplo 1.5. Hallar la ecuación del cono con vértice $(1, 2, 3)$ y curva directriz $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

Las ecuaciones de la curva directriz se escriben de nuevo con las variables x, y, z reemplazadas por x_0, y_0, z_0. Se obtiene las 5 ecuaciones particulares:[4]

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 &= 4, \\ z_0 &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= (1-t) + t\,x_0, \\ y &= 2(1-t) + t\,y_0, \\ z &= 3(1-t) + t\,z_0. \end{aligned}$$

Se eliminan x_0, y_0, z_0 al despejar estas variables de las últimas ecuaciones:

$$x_0 = \frac{t - 1 + x}{t}, \qquad y_0 = \frac{2t - 2 + y}{t}, \qquad z_0 = \frac{3t - 3 + z}{t}.$$

La ecuación $z_0 = 0$ se reduce así a $3t - 3 + z = 0$, lo cual permite eleminar t:

$$t = 1 - \frac{z}{3}\,.$$

Entonces la ecuación remanente $x_0^2 + y_0^2 = 4$ muestra que

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 = 4 &\implies (x + t - 1)^2 + (y + 2t - 2)^2 = 4t^2, \\ &\implies (x - z/3)^2 + (y - 2z/3)^2 = 4(1 - z/3)^2 \\ &\implies (3x - z)^2 + (3y - 2z)^2 = 4(3 - z)^2. \end{aligned}$$

La última ecuación es efectivamente la ecuación cartesiana del cono. Una simplificación completa lleva a la ecuación cuadrática

$$9x^2 - 6xz + 9y^2 - 12yz + z^2 + 24z - 36 = 0.$$

[4] La curva directiz es la intersección del cilindro recto circular $x_0^2 + y_0^2 = 4$ con un plano $z_0 = 0$ perpendicular a su eje de simetría; es decir, es un *círculo* horizontal. Fíjese que el vértice no está en el plano de este círculo.

Superficies de revolución

Definición 1.3. Una **superficie de revolución** se forma por una familia de **círculos generatrices** en planos paralelos, cuyos centros son los puntos de una recta fija —el **eje** de la superficie de revolución— perpendicular a estos planos; además, los círculos generatrices deben pasar por los puntos respectivos de una cierta *curva directriz*.

Un problema inmediato es cómo representar un círculo en el espacio tridimensional. Hay que partir de una observación sencilla: *la intersección una esfera y un plano es un círculo*, toda vez que esta intersección contenga más de un punto. (Un plano puede pasar lejos de la esfera, sin puntos de intersección; o bien puede "tocar" la esfera en un sólo punto de contacto. Una vez excluido estas dos posibilidades, el plano corta la esfera a lo largo de un círculo.) Para describir un círculo, se requiere entonces *dos ecuaciones*:

$$\begin{gathered}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,\\ lx+my+nz=t.\end{gathered} \tag{1.11}$$

Concretamente, la primera ecuación representa la esfera con centro $\vec{\mathbf{u}} = (a,b,c)$ y radio R; la segunda ecuación es un plano con dirección normal $\vec{\mathbf{v}} = (l,m,n)$. El parámetro t a la derecha sirve para distinguir un plano particular de entre la familia de planos paralelos, todos ortogonales a la dirección $\vec{\mathbf{v}}$.

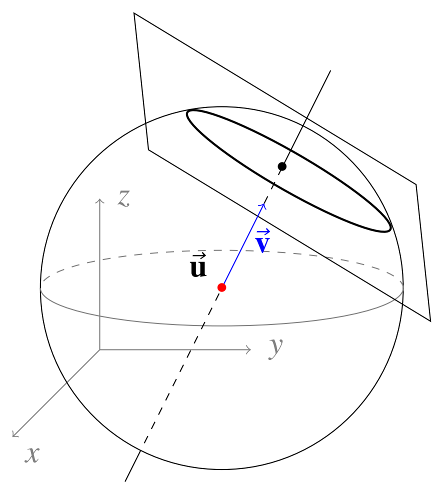


Figura 1.8: Un círculo como corte plana de una esfera

Ahora bien: en el caso de las superficies de revolución, los círculos quedan en planos perpendiculares al eje, así que $\vec{\mathbf{v}}$ denota la dirección del eje. Por simetría, se ve que el centro $\vec{\mathbf{u}}$ de la esfera es un punto del eje. Si el eje tiene ecuaciones paramétricas de la forma

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{u}} + s\,\vec{\mathbf{v}}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

entonces el par de ecuaciones (1.11) representa un círculo centrado en este eje. Este familia de círculos depende de los dos parámetros R^2 y t, los cuales a su vez están ligados mediante la curva directriz.

Concretamente, supóngase que la curva directiz tenga las ecuaciones (1.8), que $\vec{\mathbf{u}} = (a, b, c)$ es un punto específico del eje y que $\vec{\mathbf{v}} = (l, m, n)$ es la dirección del eje. Entonces las coordenadas (x_0, y_0, z_0) del punto típico de la curva directriz obedece las 4 ecuaciones:

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, z_0) &= 0, \\ G(x_0, y_0, z_0) &= 0, \\ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 &= R^2, \\ lx_0 + my_0 + nz_0 &= t. \end{aligned}$$

Al eliminar las tres variables x_0, y_0, z_0, queda una ecuación entre las dos parámetros del círculo generatriz:

$$h(R^2, t) = 0.$$

Como paso final, se sustituye los lados izquierdos de (1.11) para R^2 y t, para así obtener

$$h\big((x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2,\ lx + my + nz\big) = 0.$$

Esta relación entre las coordenadas (x, y, z) del punto típico de un círculo generatriz es efectivamente la ecuación buscada de la superficie.

Ejemplo 1.6. Encontrar la ecuación de la superficie de revolución que se genera al girar la recta $x - z = 1,\ x - y + z = 0$ alrededor del eje $x = y = z$.

En este caso, la curva directriz es la recta que debe girarse: $x_0 - z_0 = 1,\ x_0 - y_0 + z_0 = 0$. El eje es una recta que pasa por el origen, así que es prudente tomar $\vec{\mathbf{u}} = (0, 0, 0)$. El eje también pasa por el punto $(1, 1, 1)$; su dirección es dado por la diferencia de vectores $\vec{\mathbf{v}} = (1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$. Entonces el punto típico $\vec{\mathbf{r}}_0$ de la curva directriz cumple las 4 ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 - z_0 &= 1, & x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 &= R^2, \\ x_0 - y_0 + z_0 &= 0, & x_0 + y_0 + z_0 &= t. \end{aligned}$$

Se obtiene $y_0 = x_0 + z_0 = t/2$, y luego $x_0 = (t + 2)/4,\ z_0 = (t - 2)/4$, de las ecuaciones de primer grado. La ecuación cuadrática entonces toma la forma

$$(t + 2)^2 + (2t)^2 + (t - 2)^2 = 16R^2.$$

Después de simplificar, este es una relación entre R^2 y t:

$$3t^2 + 4 = 8R^2.$$

En este relación se sustituye las ecuaciones del círculo para el punto $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$, este es, $R^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ t = x + y + z,$ para obtener:

$$3(x + y + z)^2 + 4 = 8(x^2 + y^2 + z^2).$$

Esta es la ecuación de la superficie de revolución, el cual es un hiperboloide de una hoja.[5] Al expandir las parentesis y simplificar, queda la ecuación cuadrática:

$$5x^2 - 6xy - 6xz + 5y^2 - 6yz + 5z^2 - 4 = 0.$$

[5]Cuando se gira una recta alrededor de un eje, se obtiene un cono si esta recta corta el eje; pero si la recta no corta el eje, se obtiene un hiperboloide de una hoja.

Si el eje de una superficie de revolución coincide con *el eje z cartesiano*, entonces los círculos generatrices son dados por

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad z = t.$$

Si la relación $h(R^2, t) = 0$ determinada por la curva directriz se reescribe en la forma alternativa $f(R^2 - t^2, t) = 0$, entonces la ecuación de la superficie de revolución tiene la forma:

$$f(x^2 + y^2, z) = 0. \tag{1.12}$$

Dicho de otra manera: si una superficie tiene una ecuación de la forma (1.12), es decir: si las variables x, y entran la ecuación cartesiana únicamente en la combinación $(x^2 + y^2)$, entonces se trata de una superficie de revolución cuya eje es el eje z. Unos ejemplos son los cilindros rectos circulares $x^2 + y^2 = k^2$, el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

De modo similar, una ecuación de la forma $f(x^2 + z^2, y) = 0$ representa una superficie de revolución alrededor del eje y; y una ecuación de tipo $f(y^2 + z^2, x) = 0$ representa una superficie de revolución alrededor del eje x.

1.3 Curvas en el espacio $\mathbb{R}^3$

La trayectoria de una curva en el espacio $\mathbb{R}^3$ se parametriza por una función vectorial:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Las primeras dos derivadas de esta función dan la **velocidad** $\vec{\mathbf{v}}(t)$ y la **aceleración** $\vec{\mathbf{a}}(t)$ de esta trayectoria:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &:= \vec{\mathbf{r}}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \\ \vec{\mathbf{a}}(t) &:= \vec{\mathbf{r}}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)). \end{aligned}$$

La **rapidez** del recorrido es la longitud del vector de velocidad,

$$\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

La **longitud de arco** de la curva, que se mide a partir de un punto $\vec{\mathbf{r}}_0 = \vec{\mathbf{r}}(t_0)$ —donde $t_0 = 0$ en la mayoría de los casos— es la integral indefinida de la rapidez del recorrido:

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\vec{\mathbf{r}}'(\tau)\|\, d\tau.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, la derivada de $s(t)$ es la rapidez:

$$s'(t) = \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|.$$

En estas notas, siempre se supondrá que la parametrización $\vec{\mathbf{r}}(t)$ es *regular*, es decir, que la velocidad del recorrido nunca se anula: $\vec{\mathbf{r}}(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$ para todo t. Entonces el punto $\vec{\mathbf{r}}(t)$ avanza sobre la trayectoria, sin pausar ni detenerse. De este modo, *la rapidez $s'(t)$ es siempre positiva*.

Ejemplo 1.7. La *hélice* $\vec{\mathbf{r}}(t) = (\cos 3t, \operatorname{sen} 3t, 4t)$.

Véase la Figura 1.9. Su velocidad es

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = (-3 \operatorname{sen} 3t, 3 \cos 3t, 4).$$

La rapidez del recorrido es

$$\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| = \sqrt{9 \operatorname{sen}^2 3t + 9 \cos^2 3t + 16} = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

así que el recorrido tiene *rapidez constante*, aunque la velocidad $\vec{\mathbf{r}}'(t)$ no es constante, sino que cambia continuamente de dirección. La aceleración es

$$\vec{\mathbf{r}}''(t) = (-9 \cos 3t, -9 \operatorname{sen} 3t, 0),$$

que es un vector horizontal dirigido hacia el eje z.

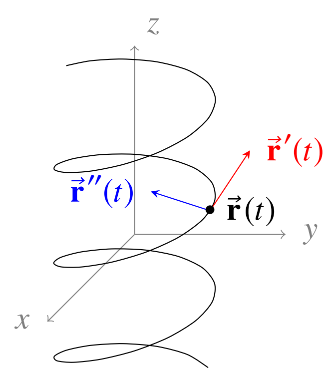


Figura 1.9: Una curva espiral: la hélice

La longitud del arco, medida a partir de $\vec{\mathbf{r}}(0) = (1, 0, 0)$, es

$$s(t) := \int_0^t 5 \, d\tau = 5t.$$

Como $t = s/5$, es posible *reparametrizar* la curva, usando s como nuevo parámetro:

$$\vec{\mathbf{r}}(s) = \left(\cos \frac{3s}{5}, \ \operatorname{sen} \frac{3s}{5}, \ \frac{4s}{5}\right).$$

Obsérvese que $\cos^2 3t + \operatorname{sen}^2 3t = 1$, así que la curva queda sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. La relación $z = 4t$ dice que la altura del punto $\vec{\mathbf{r}}(t)$ sube con un ritmo constante, proporcional a la velocidad angular de rotación de su "sombra" $(\cos 3t, \operatorname{sen} 3t, 0)$ en el plano xy.

Nótese también que

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds} = \left(-\frac{3}{5} \operatorname{sen} \frac{3s}{5}, \ \frac{3}{5} \cos \frac{3s}{5}, \ \frac{4}{5}\right),$$

el cual es un vector de longitud 1 (es decir, un "vector unitario").

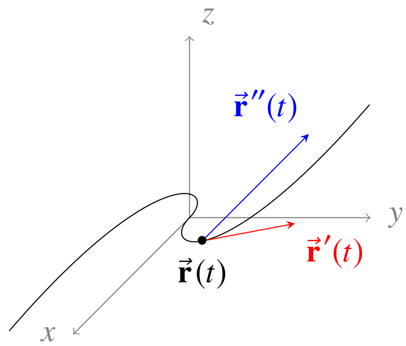


Figura 1.10: Una curva cúbica que pasa por el origen

Ejemplo 1.8. La curva cúbica $\vec{\mathbf{r}}(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}, \dfrac{t^3}{3}\right)$. Véase la Figura 1.10.

Su velocidad es

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = (1, \sqrt{2}\,t, t^2).$$

La rapidez del recorrido es

$$\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| = \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} = 1 + t^2,$$

y la longitud de arco, medida a partir de $\vec{\mathbf{r}}(0) = (0, 0, 0)$, es

$$s(t) := \int_0^t (1 + \tau^2)\,d\tau = t + \tfrac{1}{3}t^3.$$

Es *posible* despejar t en términos de s, al resolver la ecuación $t^3 + 3t - 3s = 0$, pero esto conduciría a fórmulas engorrosas para los componentes de $\vec{\mathbf{r}}(s)$. En general, *no vale la pena despejar* $t = t(s)$ *explícitamente*.

En todo caso, hay que notar que la función $s = s(t)$ es una función estrictamente creciente, al ser la integral de una función $s'(t)$ que es estrictamente positiva, cuando la parametrización $\vec{\mathbf{r}}(t)$ es regular. Una función creciente posee una función inversa, porque a cada valor de s le corresponde un solo valor de t. Es recomendable prescindir de la fórmula explícita para esta función inversa $t = t(s)$, porque las derivadas como $d\vec{\mathbf{r}}/ds$ pueden calcularse mediante la *regla de la cadena*:

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}/dt}{ds/dt} = \frac{\vec{\mathbf{r}}'(t)}{s'(t)} = \frac{\vec{\mathbf{r}}'(t)}{\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|}.$$

Fíjese que este vector es *unitario* (es decir, su longitud es 1). Además, es un múltiplo del vector tangente $\vec{\mathbf{r}}'(t)$. Conviene denotarlo por $\vec{\mathbf{T}}(t)$, el **vector tangente unitario** en el punto $\vec{\mathbf{r}}(t)$ de la curva:

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds} = \vec{\mathbf{T}}(t) = \frac{\vec{\mathbf{r}}'(t)}{\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|}. \tag{1.13}$$

En el ejemplo, se puede calcular

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds} = \vec{\mathbf{T}}(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}\,t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right),$$

sin la necesidad de despejar t en función de s.

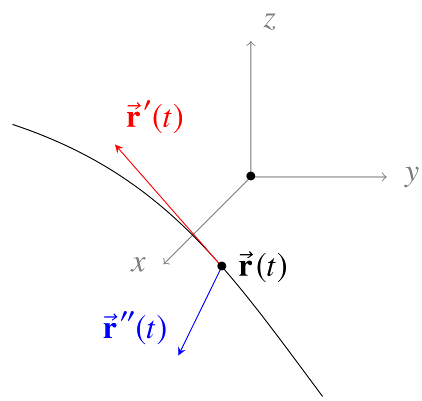


Figura 1.11: Una curva levemente alabeada

Ejemplo 1.9. La curva alabeada $\vec{\mathbf{r}}(t) = (2\cosh 3t, -2\operatorname{senh} 3t, 6t)$. Véase la Figura 1.11.

Su velocidad es

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = (6\operatorname{senh} 3t, -6\cosh 3t, 6).$$

La rapidez del recorrido es

$$\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| = \sqrt{36\operatorname{senh}^2 3t + 36\cosh^2 3t + 36} = \sqrt{72\cosh^2 3t} = 6\sqrt{2}\cosh 3t,$$

al usar la fórmula $\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x$. La longitud de arco, a partir de $\vec{\mathbf{r}}(0) = (2, 0, 0)$, es

$$s(t) := \int_0^t 6\sqrt{2}\cosh 3\tau\, d\tau = 2\sqrt{2}\operatorname{senh} 3t.$$

El **vector tangente unitario** es

$$\vec{\mathbf{T}}(t) = \frac{\vec{\mathbf{r}}'(t)}{\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|} = \frac{1}{6\sqrt{2}\cosh 3t}\,\vec{\mathbf{r}}'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh 3t, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sech} 3t\right).$$

Para hallar este vector, no hizo falta reparametrizar la curva en términos de s. En este caso, es factible cambiar de parámetro, porque la ecuación $s = 2\sqrt{2}\operatorname{senh}^2 3t$ admite la solución

$$t = \tfrac{1}{3}\log(s + \sqrt{s^2 + 8}) - \tfrac{1}{2}\log 2.$$

Al sustituir esta expresión en $\vec{\mathbf{r}}(t)$, resulta

$$\vec{\mathbf{r}}(s) = \left(\sqrt{\frac{s^2+8}{2}}, -\frac{s}{\sqrt{2}}, 2\log(s + \sqrt{s^2+8}) - 3\log 2\right).$$

Se puede verificar ahora que las fórmulas para $d\vec{\mathbf{r}}/ds$ y para $\vec{\mathbf{T}}(t)$ coinciden, al emplear una vez más la sustitución $t = t(s)$ de arriba. Pero no deja de ser mucho esfuerzo para poco resultado. La conclusión es que es más aconsejable efectuar todos los cálculos en términos del parámetro original t.

El triedro móvil $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{B}}\}$

La derivada de $\vec{\mathbf{T}}(t)$ es un vector $\vec{\mathbf{T}}'(t)$ que es *ortogonal* al propio $\vec{\mathbf{T}}(t)$:

$$\vec{\mathbf{T}}(t) \cdot \vec{\mathbf{T}}'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\vec{\mathbf{T}}(t) \cdot \vec{\mathbf{T}}(t)\big) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(1) = 0.$$

Recuérdese que $\vec{\mathbf{T}}(t) = d\vec{\mathbf{r}}/ds$ es un vector unitario. Al derivar con respecto a s en vez de t, se obtiene $d\vec{\mathbf{T}}/ds = \vec{\mathbf{T}}'(t)/s'(t)$ por la regla de la cadena: entonces $d\vec{\mathbf{T}}/ds$, que tiene la misma dirección que $\vec{\mathbf{T}}'(t)$, es también ortogonal a $\vec{\mathbf{T}}(t)$.

La longitud de $d\vec{\mathbf{T}}/ds$ no es siempre igual a 1. La **curvatura** de la curva, en el punto $\vec{\mathbf{r}}(t)$, es (por definición) esta longitud:

$$\kappa(t) := \left\|\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds}\right\| = \frac{\|\vec{\mathbf{T}}'(t)\|}{s'(t)}.$$

Entonces hay un vector unitario $\vec{\mathbf{N}}(t)$ que cumple

$$\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa(t)\,\vec{\mathbf{N}}(t), \tag{1.14}$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$\vec{\mathbf{T}}'(t) = \kappa(t)\, s'(t)\, \vec{\mathbf{N}}(t).$$

El vector $\vec{\mathbf{N}}(t)$ es el **vector normal unitario** a la curva en el punto $\vec{\mathbf{r}}(t)$. Como $\vec{\mathbf{T}}(t)$ y $\vec{\mathbf{N}}(t)$ son unitarios y ortogonales, su producto cruz en un tercer vector unitario, ortogonal a ellos dos:

$$\vec{\mathbf{B}}(t) := \vec{\mathbf{T}}(t) \times \vec{\mathbf{N}}(t). \tag{1.15}$$

Este $\vec{\mathbf{B}}(t)$ se llama el **vector binormal unitario** a la curva en el punto $\vec{\mathbf{N}}(t)$.

Para cada valor de t, los tres vectores $\{\vec{\mathbf{T}}(t), \vec{\mathbf{N}}(t), \vec{\mathbf{B}}(t)\}$ forman un **triedro** (o *dreiecks*, en alemán), es decir, un triple de vectores unitarios y mutuamente ortogonales. Es útil considerarlo como sistema de referencia cartesiana, que difiere del sistema estándar $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ por una rotación del espacio ambiente $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1.7b. La hélice $\vec{\mathbf{r}}(t) = (\cos 3t, \operatorname{sen} 3t, 4t)$, de nuevo.

Del Ejemplo 1.7, se sabe que

$$\vec{\mathbf{T}}(t) = \frac{\vec{\mathbf{r}}'(t)}{s'(t)} = \big(-\tfrac{3}{5}\operatorname{sen} 3t, \tfrac{3}{5}\cos 3t, \tfrac{4}{5}\big).$$

Entonces

$$\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{\vec{\mathbf{T}}'(t)}{s'(t)} = \tfrac{1}{5}\vec{\mathbf{T}}'(t) = \big(-\tfrac{9}{25}\cos 3t, -\tfrac{9}{25}\operatorname{sen} 3t, 0\big).$$

Su longitud es $\kappa(t) = 9/25$: la hélice tiene *curvatura constante*. Al dividir $d\vec{\mathbf{T}}/ds$ por $\kappa(t)$, se obtiene entonces

$$\vec{\mathbf{N}}(t) = (-\cos 3t, -\operatorname{sen} 3t, 0),$$

que efectivamente es unitario y ortogonal a $\vec{\mathbf{T}}(t)$. El vector binormal unitario es

$$\vec{\mathbf{B}}(t) = \vec{\mathbf{T}}(t) \times \vec{\mathbf{N}}(t) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -\frac{3}{5}\operatorname{sen} 3t & \frac{3}{5}\cos 3t & \frac{4}{5} \\ -\cos 3t & -\operatorname{sen} 3t & 0 \end{vmatrix} = \left(\tfrac{4}{5}\operatorname{sen} 3t, -\tfrac{4}{5}\cos 3t, \tfrac{3}{5}\right).$$

Ejemplo 1.8b. La curva cúbica $\vec{\mathbf{r}}(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}, \dfrac{t^3}{3}\right)$, de nuevo.

Del Ejemplo 1.8, se calcula que

$$\vec{\mathbf{T}}(t) = \frac{\vec{\mathbf{r}}'(t)}{s'(t)} = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}\,t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right).$$

Entonces

$$\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{\vec{\mathbf{T}}'(t)}{s'(t)} = \frac{\vec{\mathbf{T}}'(t)}{1+t^2} = \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^3}, \frac{\sqrt{2}(1-t^2)}{(1+t^2)^3}, \frac{2t}{(1+t^2)^3}\right).$$

La longitud de este vector es

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}.$$

Al dividir $d\vec{\mathbf{T}}/ds$ por $\kappa(t)$, se obtiene

$$\vec{\mathbf{N}}(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}\right).$$

En este caso, el vector binormal unitario es

$$\vec{\mathbf{B}}(t) = \vec{\mathbf{T}}(t) \times \vec{\mathbf{N}}(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}, -\frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right).$$

Ejemplo 1.9b. La curva alabeada $\vec{\mathbf{r}}(t) = (2\cosh 3t, -2\operatorname{senh} 3t, 6t)$, de nuevo.

Del Ejemplo 1.9, se obtiene

$$\vec{\mathbf{T}}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh 3t, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sech} 3t\right).$$

Entonces

$$\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{\vec{\mathbf{T}}'(t)}{s'(t)} = \frac{\vec{\mathbf{T}}'(t)}{6\sqrt{2}\cosh 3t} = \left(\tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^3 3t, 0, -\tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^2 3t \tanh 3t\right).$$

Al calcular la longitud de este vector y dividir por ella, resulta

$$\kappa(t) = \tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^2 3t, \qquad \vec{\mathbf{N}}(t) = (\operatorname{sech} 3t, 0, -\tanh 3t).$$

Finalmente, el vector binormal unitario es

$$\vec{\mathbf{B}}(t) = \vec{\mathbf{T}}(t) \times \vec{\mathbf{N}}(t) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\tanh 3t & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sech} 3t \\ \operatorname{sech} 3t & 0 & -\tanh 3t \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh 3t, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sech} 3t\right).$$

Aceleración y curvatura

En términos del triedro móvil, la velocidad es simplemente

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{r}}'(t) = s'(t)\,\vec{\mathbf{T}}(t).$$

La derivada de esta relación es, por la regla de producto,

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}}(t) = \vec{\mathbf{r}}''(t) &= s''(t)\,\vec{\mathbf{T}}(t) + s'(t)\,\vec{\mathbf{T}}'(t) \\ &= s''(t)\,\vec{\mathbf{T}}(t) + \kappa(t)\,s'(t)^2\,\vec{\mathbf{N}}(t).\end{aligned}$$

Esto significa que la **aceleración** es un vector en el plano generado por los vectores unitarios tangente y normal —el cual es perpendicular al vector binormal unitario $\vec{\mathbf{B}}(t)$— y que sus **componentes** en estas dos direcciones son

$$a_T(t) := \vec{\mathbf{a}}(t)\cdot\vec{\mathbf{T}}(t) = s''(t), \qquad a_N(t) := \vec{\mathbf{a}}(t)\cdot\vec{\mathbf{N}}(t) = \kappa(t)\,s'(t)^2.$$

En un caso en donde la rapidez del recorrido $s'(t)$ es constante, de modo que $s''(t) = 0$, el componente tangencial se anula y la aceleración es ortogonal a la velocidad. Tal es el caso del movimiento circular uniforme, en donde la aceleración es un vector dirigido hacia el centro del círculo del recorrido ("aceleración centrípeta").

En producto cruz de la velocidad y la aceleración es

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}'(t)\times\vec{\mathbf{r}}''(t) &= s'(t)\,s''(t)\,\vec{\mathbf{T}}(t)\times\vec{\mathbf{T}}(t) + \kappa(t)\,s'(t)^3\,\vec{\mathbf{T}}(t)\times\vec{\mathbf{N}}(t) \\ &= \kappa(t)\,s'(t)^3\,\vec{\mathbf{B}}(t),\end{aligned} \tag{1.16}$$

porque $\vec{\mathbf{T}}(t)\times\vec{\mathbf{T}}(t) = \vec{\mathbf{0}}$. La longitud de este vector es

$$\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\times\vec{\mathbf{r}}''(t)\| = \kappa(t)\,s'(t)^3 = \kappa(t)\,\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|^3,$$

y de ahí resulta **una fórmula para la curvatura**, en términos de la parametrización original:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\times\vec{\mathbf{r}}''(t)\|}{\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|^3}\,. \tag{1.17}$$

Curvatura y torsión

Como el vector binormal $\vec{\mathbf{B}}(t)$ es unitario, su derivada (con respecto a s, la longitud de arco) es ortogonal al propio $\vec{\mathbf{B}}(t)$:

$$\vec{\mathbf{B}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}(\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{B}}) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}(1) = 0.$$

Por otro lado, esta derivada es también ortogonal a $\vec{\mathbf{T}}(t)$:

$$\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{\mathbf{T}}\times\vec{\mathbf{N}}) = \frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds}\times\vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{T}}\times\frac{d\vec{\mathbf{N}}}{ds} = \vec{\mathbf{T}}\times\frac{d\vec{\mathbf{N}}}{ds},$$

ya que $(d\vec{\mathbf{T}}/ds)\times\vec{\mathbf{N}} = \kappa\,\vec{\mathbf{N}}\times\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{0}}$. Por lo tanto, $d\vec{\mathbf{B}}/ds$ debe ser un múltiplo del tercer vector $\vec{\mathbf{N}}$ del triedro móvil. Se introduce una cantidad $\tau(t)$, llamada la **torsión** de la curva en el punto $\vec{\mathbf{r}}(t)$, por la definición:

$$\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau(t)\,\vec{\mathbf{N}}(t).$$

(Atención al signo menos: esto es el convenio usual.)

Como el vector $\vec{\mathbf{N}}(t)$ tiene longitud constante 1 también, se ve que $d\vec{\mathbf{N}}/ds$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{N}}$ por una razón similar, así que $d\vec{\mathbf{N}}/ds$ queda en el plano generado por los vectores $\vec{\mathbf{T}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. No es difícil comprobar la relación

$$\frac{d\vec{\mathbf{N}}}{ds} = -\kappa(t)\,\vec{\mathbf{T}}(t) + \tau(t)\,\vec{\mathbf{B}}(t),$$

al aplicar d/ds a las identidades $\vec{\mathbf{N}}\cdot\vec{\mathbf{T}} = 0$ y $\vec{\mathbf{N}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0$.

En resumen, se ha obtenido las **fórmulas de Frenet y Serret**:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} &= \qquad\qquad \kappa(t)\,\vec{\mathbf{T}}, \\
\frac{d\vec{\mathbf{N}}}{ds} &= -\kappa(t)\,\vec{\mathbf{T}} \qquad\qquad + \tau(t)\,\vec{\mathbf{B}}, \\
\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds} &= \qquad\quad -\tau(t)\,\vec{\mathbf{N}}.
\end{aligned}$$

En términos del triedro móvil, se puede expresar estas ecuaciones diferenciales en forma matricial:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\vec{\mathbf{T}}\\ \vec{\mathbf{N}}\\ \vec{\mathbf{B}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa(t) & 0\\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t)\\ 0 & -\tau(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\mathbf{T}}\\ \vec{\mathbf{N}}\\ \vec{\mathbf{B}}\end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Obsérvese que esta matriz de coeficientes es antisimétrica. De hecho, esto es de esperar, puesto que el triedro móvil cambia de un punto a otro por rotaciones, y cada "rotación infinitesimal" posee una matriz antisimétrica.

La relación (1.18) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (lineales) de primer orden, para los 9 componentes de los tres vectores $\vec{\mathbf{T}}(t)$, $\vec{\mathbf{N}}(t)$, $\vec{\mathbf{B}}(t)$. Por teoremas conocidos de existencia y unicidad de tales ecuaciones diferenciales, la solución existe y queda determinada por una condición inicial $\big(\vec{\mathbf{T}}(t_0), \vec{\mathbf{N}}(t_0), \vec{\mathbf{B}}(t_0)\big) = (\vec{\mathbf{T}}_0, \vec{\mathbf{N}}_0, \vec{\mathbf{B}}_0)$. En otras palabras: dadas las dos funciones de curvatura y torsión, la curva completa queda determinada por la posición del triedro móvil en un instante inicial $t = t_0$.

Ejemplo 1.9c. La curva alabeada $\vec{\mathbf{r}}(t) = (2\cosh 3t, -2\,\mathrm{senh}\,3t, 6t)$, una vez más.

Del Ejemplo 1.9b, se sabe que

$$\vec{\mathbf{B}}(t) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh 3t,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sech}\,3t\Big).$$

Entonces
$$\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds} = \frac{\vec{\mathbf{B}}'(t)}{s'(t)} = \frac{\vec{\mathbf{B}}'(t)}{6\sqrt{2}\cosh 3t} = \left(\tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^3 3t, 0, -\tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^2 3t \tanh 3t\right).$$
También se ha vista que, para esta curva, vale
$$\vec{\mathbf{N}}(t) = (\operatorname{sech} 3t, 0, -\tanh 3t),$$
de modo que
$$\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds} = \tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^2 3t\, \vec{\mathbf{N}}(t),$$
y se concluye que
$$\tau(t) = -\tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^2 3t.$$
Esta curva se caracteriza por la curiosa relación $\tau(t) = -\kappa(t)$; pero en casos más generales, los parámetros τ y κ son independientes.

La derivada de la relación (1.16) es
$$\vec{\mathbf{r}}'(t) \times \vec{\mathbf{r}}'''(t) = \left(\kappa'(t)\, s'(t)^3 + 3\kappa(t)\, s'(t)^2\, s''(t)\right) \vec{\mathbf{B}}(t) + \kappa(t)\, s'(t)^3\, \vec{\mathbf{B}}'(t).$$
Como $d\vec{\mathbf{B}}/ds = s'(t)\,\vec{\mathbf{B}}'(t)$ es paralela a $\vec{\mathbf{N}}(t)$, esto implica que
$$\begin{aligned}(\vec{\mathbf{r}}'(t) \times \vec{\mathbf{r}}''(t)) \cdot \vec{\mathbf{r}}'''(t) &= -(\vec{\mathbf{r}}'(t) \times \vec{\mathbf{r}}'''(t)) \cdot \vec{\mathbf{r}}''(t) \\ &= -\kappa(t)\, s'(t)^4\, \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds} \cdot \kappa(t)\, s'(t)^2\, \vec{\mathbf{N}}(t) = +\kappa(t)^2\, s'(t)^6\, \tau(t).\end{aligned}$$
En vista de la fórmula $\|\vec{\mathbf{r}}'(t) \times \vec{\mathbf{r}}''(t)\| = \kappa(t)\, s'(t)^3$ que conduce a (1.17), esta relación proporciona una **fórmula para la torsión**, en términos de la parametrización original:
$$\tau(t) = \frac{(\vec{\mathbf{r}}'(t) \times \vec{\mathbf{r}}''(t)) \cdot \vec{\mathbf{r}}'''(t)}{\|\vec{\mathbf{r}}'(t) \times \vec{\mathbf{r}}''(t)\|^2}. \tag{1.19}$$

Radio de curvatura y círculo osculador

La **recta tangente** en un punto $\vec{\mathbf{r}}_0$ de una curva es la recta “que mejor se aproxima” a la curva en ese punto. Si se parametriza la curva por su longitud de arco, a partir de un determinado punto, el teorema de Taylor dice que la curva tiene la forma
$$\vec{\mathbf{r}}(s) = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{T}}_0\, s + \kappa(0)\, \vec{\mathbf{N}}_0\, \frac{s^2}{2} + \vec{\mathbf{u}}(s)\, s^2,$$
donde $\vec{\mathbf{u}}(s) \to 0$ cuando $s \to 0$; aquí $\left(\vec{\mathbf{T}}(0), \vec{\mathbf{N}}(0), \vec{\mathbf{B}}(0)\right) = (\vec{\mathbf{T}}_0, \vec{\mathbf{N}}_0, \vec{\mathbf{B}}_0)$ denota la posición inicial del triedro móvil. Al dejar de lado el término de segundo orden y el residuo, los términos $\vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{T}}_0 s$ dan una parametrización de la recta tangente, ya que ésta pasa por el punto $\vec{\mathbf{r}}_0$ en la dirección $\vec{\mathbf{T}}_0$.

Si se conserva el término de segundo orden, la fórmula
$$\vec{\mathbf{q}}(s) = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{T}}_0\, s + \kappa(0)\, \vec{\mathbf{N}}_0\, \frac{s^2}{2}$$

representa la curva cuadrática (de hecho, una parábola) que mejor se aproxima a la curva original $\vec{\mathbf{r}}(s)$ en el punto $\vec{\mathbf{r}}_0$. Esta curva queda en el plano que pasa por $\vec{\mathbf{r}}_0$ y contiene las direcciones tangente $\vec{\mathbf{T}}_0$ y normal $\vec{\mathbf{N}}_0$ en ese punto. Este es el **plano osculador** a la curva en el punto $\vec{\mathbf{r}}_0$. El vector binormal $\vec{\mathbf{B}}_0$ es ortogonal al plano, cuya ecuación es entonces $\vec{\mathbf{B}}_0 \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0) = 0$.

Es tradicional aproximar la curva cerca de $\vec{\mathbf{r}}_0$ por un *círculo*[6] en vez de la parábola $\vec{\mathbf{q}}(s)$. Este círculo queda en el plano osculador, con centro en la recta que sale de $\vec{\mathbf{r}}_0$ en la dirección normal $\vec{\mathbf{N}}_0$, y su curvatura (¡constante!) coincide con $\kappa(0)$. Este es el **círculo osculador** a la curva en $\vec{\mathbf{r}}_0$. Su radio se llama el **radio de curvatura**:

$$\rho := \frac{1}{\kappa(0)}.$$

Ahora bien: si se usa *una parametrización general* $\vec{\mathbf{r}}(t)$ que no sea la longitud del arco, la búsqueda del círculo osculador es levemente más complicada. En un determinado punto $\vec{\mathbf{r}}(t)$ de la curva, el *centro del círculo osculador* es el punto

$$\vec{\mathbf{c}}(t) = \vec{\mathbf{r}}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\vec{\mathbf{N}}(t),$$

y el radio de curvatura es $\rho(t) = 1/|\kappa(t)|$. Hay una dependencia de t porque evidentemente hay una familia de círculos osculadores, uno para cada punto de la curva. [Cuando $\kappa(t) = 0$, este círculo degenera en la recta tangente en el punto $\vec{\mathbf{r}}(t)$.]

[6] Aquí la palabra **círculo** denota siempre una curva redonda y no el disco rodeado por esa curva. En algunos idiomas romances (español, portugués, italiano, francés, rumano) hay una costumbre popular de emplear el término *círculo* para designar el disco redondo, denotando su curva de borde con el vocablo *circunferencia*. Este hábito es poco aconsejable, por cuanto el contorno de cualquier región acotada del plano – sin agujeros – es también una circunferencia.